

CONTROL ROBUSTO MULTICRITERIO,  
DIFERENTES ENFOQUES

Diana Marcela Ovalle Martínez

Dirigido por:  
ALAIN GAUTHIER SELLIER  
y  
JACQUES BERNUSSOU

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE INGENIERIA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRICA Y ELECTRONICA  
BOGOTA  
2007

*A la memoria de mi abuela Ocha,  
quien en vida supo que mi grado de maestría  
estaba casi listo, y siempre me encomendó  
en sus oraciones.*

*A mi familia, por el apoyo y la fuerza  
en los momentos más difíciles  
y también por sus oraciones.*

*A Pacho, por haber hecho posible  
que estos estudios sean una realidad  
y que con su apoyo siempre me ayudó  
a seguir adelante para culminarlos  
con éxito, pese a todo.*

# Contenido

Contenido	IV
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos Generales</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción	3
1.2. Desigualdades Lineales Matriciales ( $\mathcal{LMIs}$ )	3
1.3. Norma $\mathcal{H}_2$	5
1.4. Norma $\mathcal{H}_\infty$	7
1.5. Sistemas con Incertidumbres	10
1.5.1. Incertidumbres Limitadas en Norma	10
1.5.2. Incertidumbres Politópicas	11
1.6. Estabilidad	11
1.6.1. Sistemas de Tiempo Continuo	11
1.6.2. Sistemas de Tiempo Discreto	13
1.7. Funciones de Lyapunov Dependientes de Parámetros, $\mathcal{FLDPs}$	14
<b>2. Estabilidad y Estabilidad Robusta</b>	<b>16</b>
2.1. Estabilidad	16
2.1.1. Sistemas de Tiempo Continuo	16
<i>Realimentación de Estado</i>	16
<i>Realimentación de Salida</i>	17
2.1.2. Sistemas de Tiempo Discreto	19
<i>Realimentación de Estado</i>	19
<i>Realimentación de Salida</i>	20
2.2. Estabilidad Robusta	22
2.2.1. Sistemas en Tiempo Continuo	22

	<i>Realimentación de Estado</i> . . . . .	23
	Incertidumbres Politópicas . . . . .	23
	<i>Aproximación Cuadrática</i> . . . . .	24
	<i>Aproximación por FLDP</i> . . . . .	24
	Incertidumbres Limitadas en Norma . . . . .	25
	<i>Realimentación de Salida</i> . . . . .	25
	Incertidumbres Politópicas . . . . .	27
	Incertidumbres Limitadas en Norma . . . . .	27
2.2.2.	Sistemas en Tiempo Discreto . . . . .	28
	<i>Realimentación de Estado</i> . . . . .	28
	Incertidumbres Politópicas . . . . .	29
	<i>Aproximación Cuadrática</i> . . . . .	29
	<i>Aproximación por FLDP</i> . . . . .	30
	Incertidumbres Limitadas en Norma . . . . .	30
	<i>Realimentación de Salida</i> . . . . .	30
	Incertidumbres Politópicas . . . . .	32
	Incertidumbres Limitadas en Norma . . . . .	32
<b>3.</b>	<b>Síntesis <math>\mathcal{H}_2</math></b> . . . . .	<b>34</b>
3.1.	Síntesis $\mathcal{H}_2$ en Tiempo Continuo . . . . .	34
3.1.1.	Realimentación de Estado . . . . .	35
	Caso sin incertidumbres . . . . .	35
	Caso con incertidumbres . . . . .	36
3.1.2.	Realimentación de Salida . . . . .	40
3.2.	Síntesis $\mathcal{H}_2$ en Tiempo Discreto . . . . .	42
3.2.1.	Realimentación de Estado . . . . .	43
3.2.2.	Realimentación de Salida . . . . .	46
<b>4.</b>	<b>Síntesis <math>\mathcal{H}_\infty</math></b> . . . . .	<b>49</b>
4.1.	Introducción . . . . .	49
4.2.	Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ en Tiempo Continuo . . . . .	49
4.2.1.	Realimentación de Estado . . . . .	50
	Caso sin incertidumbres . . . . .	50
	Caso con incertidumbres . . . . .	50
4.2.2.	Realimentación de Salida . . . . .	52
4.3.	Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ en Tiempo Discreto . . . . .	54
4.3.1.	Realimentación de Estado . . . . .	56
	Caso sin incertidumbres . . . . .	56
	Caso con incertidumbres . . . . .	56

4.3.2. Realimentación de Salida . . . . .	58
<b>5. Síntesis Multicriterio</b>	<b>61</b>
5.1. Introducción . . . . .	61
5.2. Síntesis Multicriterio en Tiempo Continuo . . . . .	61
5.2.1. Realimentación de Estado . . . . .	62
Caso sin incertidumbres . . . . .	62
Caso con incertidumbres . . . . .	62
5.2.2. Realimentación de Salida . . . . .	64
5.3. Síntesis $\mathcal{H}_2$ en Tiempo Discreto . . . . .	67
5.3.1. Realimentación de Estado . . . . .	67
5.3.2. Realimentación de Salida . . . . .	70
<b>6. Aplicación Numérica</b>	<b>73</b>
6.1. Sistema en Tiempo Continuo . . . . .	73
6.1.1. Estabilidad (Realimentación de Estado) . . . . .	74
6.1.2. Síntesis $\mathcal{H}_2$ (Realimentación de Estado) . . . . .	78
6.1.3. Síntesis Multicriterio (Realimentación de Estado) . . . . .	78
6.2. Sistema en Tiempo Discreto . . . . .	80
6.2.1. Estabilidad (Realimentación de Estado) . . . . .	80
6.2.2. Síntesis $\mathcal{H}_2$ (Realimentación de Estado) . . . . .	81
6.2.3. Síntesis Multicriterio (Realimentación de Estado) . . . . .	82
<b>Conclusiones</b>	<b>84</b>
<b>Trabajos Futuros</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

# Introducción

El problema del control robusto ha sido ampliamente estudiado desde la década de los 80's y ha crecido como una de las áreas más importantes en el diseño de control moderno. La idea general del control robusto es analizar o sintetizar controladores que permitan que el sistema en lazo cerrado se comporte de forma adecuada dentro de límites conocidos, cuando dicho sistema es sometido a perturbaciones externas, parcialmente desconocidas, y/o se tiene incertidumbre en el modelo (sobre la dinámica o sobre los parámetros que componen el sistema).

En este trabajo se tratan sistemas con incertidumbres estructuradas, [3]: politópicas, cuyo dominio de incertidumbre es un politopo de vértices conocidos, y limitada en norma, cuyo modelo nominal dado es el centro del dominio de incertidumbre, que normalmente es una elipsoide, adicionalmente en esta descripción se especifica la forma en que la incertidumbre afecta al modelo nominal.

De acuerdo al test de estabilidad robusta que utilizan, se encuentran diferentes aproximaciones al problema del control robusto. Inicialmente, están los análisis orientados al dominio de la frecuencia, tal como el análisis  $\mu$  que incluye incertidumbres paramétricas al igual que incertidumbres en la dinámica del sistema. También, se encuentran aproximaciones algebraicas, difíciles de aplicar en los problemas de análisis y casi de ningún uso en los problemas de síntesis. Finalmente, se tiene la aproximación de Lyapunov, la usada en este trabajo, a la cual se le conoce como aproximación cuadrática en su forma básica, centrada en el uso de una única función de Lyapunov para probar la estabilidad en todo el dominio de la incertidumbre. En la aproximación por Lyapunov, una versión mucho más elaborada, sugiere el uso de una función de Lyapunov dependiente de parámetros ( $\mathcal{FLDP}$ ) en la que por cada vértice del dominio de la incertidumbre, en las incertidumbres politópicas, existe una matriz de Lyapunov que prueba la estabilidad de dicho vértice y una matriz adicional variable, que permiten reducir un poco el conservatismo, [15], este test de estabilidad recibe el nombre de aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s.

Una gran ventaja del trabajo a partir del test de estabilidad de Lyapunov es que se pueden formular los problemas a partir de las desigualdades lineales matriciales

( $\mathcal{LMIs}$ , de sus iniciales en inglés, Linear Matrix Inequalities), que han emergido como una poderosa herramienta para la formulación de numerosos problemas de control [6], ya que resolver  $\mathcal{LMIs}$  es un problema de optimización convexa, tales formulaciones tienen solución numérica por varios métodos como los algoritmos de punto interior, que para esta época son bastante eficientes. Algunos programas de simulación tales como Matlab<sup>®</sup>, utilizado para los cálculos numéricos en este trabajo, en su toolbox de  $\mathcal{LMIs}$  utiliza algoritmos de punto interior para solucionar dichas formulaciones, [10]. Por lo que llevar un problema de diseño de un sistema de control a una formulación por  $\mathcal{LMIs}$  se considera una solución práctica al problema, [6].

Cuando en la síntesis de controladores robustos, problema que se aborda en este trabajo, se deben cumplir varias consideraciones, el control es llamado multicriterio, o multiobjetivo [17], [5], [16] y [9]. Aquí en particular será tratado el problema multicriterio  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  con una función de Lyapunov común, que garantiza las especificaciones deseadas a expensas del conservatismo, ya que el hecho de utilizar funciones de Lyapunov diferentes, lleva a problemas no convexos que salen del alcance del trabajo, [9].

El libro está organizado así: el capítulo 1 presenta los conceptos básicos para entender el problema que se aborda y la metodología que se utiliza a la hora de formularlo en forma de  $\mathcal{LMIs}$ , en los capítulos del 2 al 5 se trabaja el problema de síntesis por realimentación de estado y por realimentación de salida dinámica para sistemas tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto, con incertidumbres limitada en norma y politópica desde las aproximaciones cuadrática y por  $\mathcal{FLDPs}$ , más exactamente en el capítulo 2 se sintetizan controladores estabilizantes para el sistema en lazo cerrado, en el capítulo 3 se sintetizan controladores estabilizantes que minimizan un límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  para el sistema en lazo cerrado, en el capítulo 4 se sintetizan controladores estabilizantes que minimizan un límite superior de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  para el sistema en lazo cerrado y en el capítulo 5 se sintetizan controladores estabilizantes que minimizan un límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  y garantizan un valor del límite superior de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  para el sistema en lazo cerrado. El capítulo 6 presenta algunos ejemplos de aplicación, de donde se sacaron conclusiones sobre los resultados de utilizar las aproximaciones cuadrática y por  $\mathcal{FLDPs}$  en el problema de síntesis multicriterio por realimentación de estado en sistemas con incertidumbres politópicas.

# Capítulo 1

## Conceptos Generales

En este capítulo se introducen los conceptos básicos que permitirán desarrollar a lo largo de este documento (texto) ciertas operaciones como lo son: el complemento de Schur para pasar de una desigualdad cuadrática a una desigualdad lineal matricial, las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas, la definición de incertidumbres politópicas y limitadas en norma, entre otras.

### 1.1. Introducción

### 1.2. Desigualdades Lineales Matriciales ( $\mathcal{LMIs}$ )

Una desigualdad lineal matricial ( $\mathcal{LMI}$ , por sus siglas del ingles Linear Matrix Inequality) tiene la forma (referencia Boyd)

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (1.2.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es la variable y las matrices simétricas  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , son dadas. La desigualdad en (1.2.1) significa que  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es positiva definida [ref chen]. La  $\mathcal{LMI}$  en (1.2.1) es equivalente a un conjunto de  $n$  desigualdades polinomiales en  $\mathbf{x}$  y a su vez son un conjunto de restricciones convexas en  $\mathbf{x}$ .

Hay que senalar que pueden tenerse desigualdades matriciales lineales no estrictas, si la desigualdad es del tipo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}. \quad (1.2.2)$$



Una característica interesante es que algunas desigualdades matriciales (convexas) no lineales, pueden ser convertidas en LMIs a través de la fórmula del **complemento de Schur**, que se detalla a continuación.

**Lema 1.2.1.** *La LMI*

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}' & \mathbf{R} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (1.2.3)$$

*Puede ser expresada como*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0} \quad y \quad \mathbf{R} - \mathbf{Q}'\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} > \mathbf{0} \quad (1.2.4)$$

ó

$$\mathbf{R} > \mathbf{0} \quad y \quad \mathbf{P} - \mathbf{Q}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}' > \mathbf{0} \quad (1.2.5)$$

donde  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  y  $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ .

**Observación 1.2.2.** *Es importante notar que en una LMI las variables son matrices que aparecen en forma lineal en la desigualdad. Una vez escrita como LMI, se puede invocar con certeza la convexidad de la desigualdad, lo que muchas veces no es aparente de las desigualdades no lineales.*

**Observación 1.2.3.** *Una vez escrita una desigualdad matricial como una LMI, existen herramientas poderosas para la resolución de tales problemas, como por ejemplo el "Toolbox de LMIs de Matlab", [ref], que utiliza métodos que aprovechan la estructura particular de las LMIs para su resolución.*

En un sentido más amplio, los problemas formulados en términos de LMIs, no son más que problemas de programación semidefinida, los que a su vez son una generalización de problemas de programación lineal en los que las restricciones de desigualdad son remplazadas por desigualdades generalizadas, correspondientes al cono de matrices semidefinidas [PL03].

### 1.3. Norma $\mathcal{H}_2$

En un modelo  $\mathcal{LTI}$  (Lineal Invariante en el Tiempo), la norma  $\mathcal{H}_2$  de un modelo nominal  $\mathbf{G}(s)$ , estable y estrictamente propio ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ) es

$$\|\mathbf{G}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traza} [\mathbf{G}'(-j\omega)\mathbf{G}(j\omega)] d\omega \quad (1.3.1)$$

$$= \int_0^{\infty} \text{Traza} [\mathbf{G}'(t)\mathbf{G}(t)] dt \quad (1.3.2)$$

donde

$$\mathbf{G}(t) = \text{Laplace}^{-1} [\mathbf{G}(s)] \quad (1.3.3)$$

#### Norma $\mathcal{H}_2$ de sistemas en tiempo continuo

Sea el sistema con representación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{w}_2(t) \quad (1.3.4)$$

$$\mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{w}_2(t) \quad (1.3.5)$$

La función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}_2(s)$  a la salida  $\mathbf{z}_2(s)$  del sistema representado por 1.3.4 y 1.3.5 es

$$T_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(s) = [\mathbf{C}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{22}] \quad (1.3.6)$$

La norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema, donde  $\mathbf{A}$  debe ser estable y  $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$  para que la norma sea finita, puede ser expresada como

$$\|T_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(s)\|_2^2 = \text{Traza} [\mathbf{B}'_2\mathbf{Q}\mathbf{B}_2] \quad (1.3.7)$$

Donde  $\mathbf{Q}$  es el *Gramiano de Obserabilidad*, solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}'\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{C}'_2\mathbf{C}_2 = \mathbf{0} \quad (1.3.8)$$

O en forma dual:

$$\|T_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(s)\|_2^2 = \text{Traza} [\mathbf{C}_2\mathbf{P}\mathbf{C}'_2] \quad (1.3.9)$$

Donde  $\mathbf{P}$  es el *Gramiano de Controlabilidad*, solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2' = \mathbf{0} \quad (1.3.10)$$

Las ecuaciones gramianas (5.2.4) y (5.2.5) pueden ser transformadas a LMIs, de donde finalmente se obtienen dos expresiones para el cálculo de la norma  $\mathcal{H}_2$  de un sistema en tiempo continuo. La norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema se puede hallar como el óptimo  $\Gamma_2$  de cualquiera de los dos problemas de optimización LMI presentados a continuación:

$$\Gamma_2^2 = \text{mín}(\text{Traza} [\mathbf{C}_2\mathbf{P}\mathbf{C}_2'])$$

Sujeto a

$$\mathbf{P} > \mathbf{0} \quad (1.3.11)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2' < \mathbf{0}$$

Y

$$\Gamma_2^2 = \text{mín}(\text{Traza} [\mathbf{B}_2'\mathbf{Q}\mathbf{B}_2])$$

Sujeto a

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0} \quad (1.3.12)$$

$$\mathbf{A}'\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} + \mathbf{C}_2'\mathbf{C}_2 < \mathbf{0}$$

### Norma $\mathcal{H}_2$ de sistemas en tiempo discreto

Sea el sistema con representación de estado

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{w}_2[k] \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{z}_2[k] = \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{22}\mathbf{w}_2[k] \quad (1.3.14)$$

y con función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}_2(z)$  a la salida  $\mathbf{z}(z)_2$

$$T_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}(z) = [\mathbf{C}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{22}] \quad (1.3.15)$$

La norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema puede expresarse como

$$\|T_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}\|_2^2 = \text{Traza} [\mathbf{B}_2'\mathbf{Q}\mathbf{B}_2] \quad (1.3.16)$$

Donde  $\mathbf{Q}$  es el *Gramiano de Obserabilidad*, solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}'\mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{Q} + \mathbf{C}'_2\mathbf{C}_2 = \mathbf{0} \quad (1.3.17)$$

O en forma dual:

$$\|T_{\mathbf{z}_2\mathbf{w}_2}\|_2^2 = \text{Traza}[\mathbf{C}_2\mathbf{P}\mathbf{C}'_2] \quad (1.3.18)$$

Donde  $\mathbf{P}$  es el *Gramiano de Controlabilidad*, solución definida positiva de la ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}' - \mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{B}'_2 = \mathbf{0} \quad (1.3.19)$$

La norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema se puede hallar como el óptimo  $\Gamma_2$  de cualquiera de los dos problemas de optimización LMI presentados a continuación:

$$\Gamma_2^2 = \text{mín}(\text{Traza}[\mathbf{C}_2\mathbf{P}^+\mathbf{C}'_2])$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{P}\mathbf{A}' & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_2 & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\Gamma_2^2 = \text{mín}(\text{Traza}[\mathbf{B}'_2\mathbf{Q}^+\mathbf{B}_2])$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q}\mathbf{A} & \mathbf{C}'_2 \\ \mathbf{A}'\mathbf{Q} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (1.3.20)$$

## 1.4. Norma $\mathcal{H}_\infty$

La norma  $\mathcal{H}_\infty$  para un sistema con matriz de función de transferencia  $\mathbf{G}(s)$  está definida como

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \text{máx}_\omega \bar{\sigma}[\mathbf{G}(j\omega)] \quad (1.4.1)$$

donde  $\bar{\sigma}$  es el valor singular máximo de  $\mathbf{G}$ , es decir

$$\bar{\sigma} = \lambda_{\text{máx}}^{1/2}(\mathbf{G}'(-j\omega)\mathbf{G}(j\omega)) \quad (1.4.2)$$

### Norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas en tiempo continuo

Sea el sistema con representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1(t) \\ \mathbf{z}_1(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}_1(t)\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

La función de transferencia de  $\mathbf{w}_1$  a  $\mathbf{z}_1$  es

$$\mathbf{G}(s) = T_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1} = \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}\tag{1.4.4}$$

**Teorema 1.4.1.** *La norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema (6.1.1) es*

$$\|T_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}\|_\infty^2 = \min \quad \gamma$$

*Sujeto a*

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}'_1\mathbf{C}_1 & (\mathbf{P}\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}'_1\mathbf{D}_{11}) \\ (\mathbf{P}\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}'_1\mathbf{D}_{11})' & -\gamma\mathbf{I} + \mathbf{D}'_{11}\mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} &< \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1.4.5}$$

*Que también puede ser escrito como*

$$\|T_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}\|_\infty^2 = \min \quad \gamma$$

*Sujeto a*

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{P}\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}'_1\mathbf{D}_{11} & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{P}\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}'_1\mathbf{D}_{11})' & -\gamma\mathbf{I} + \mathbf{D}'_{11}\mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} &< \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

*De forma dual*

$$\|T_{\mathbf{z}_1\mathbf{w}_1}\|_\infty^2 = \min \quad \gamma$$

*Sujeto a*

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_1\mathbf{B}'_1 & \mathbf{Q}\mathbf{C}'_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}'_{11} \\ (\mathbf{Q}\mathbf{C}'_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}'_{11})' & -\gamma\mathbf{I} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{D}'_{11} \end{bmatrix} &< \mathbf{0}\end{aligned}\tag{1.4.7}$$

Que también puede ser escrito como

$$\|T_{\mathbf{z}_1 \mathbf{w}_1}\|_\infty^2 = \text{mín } \gamma$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}' & \mathbf{Q}\mathbf{C}'_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_1 \\ (\mathbf{Q}\mathbf{C}'_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_{11})' & -\gamma\mathbf{I} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{D}'_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

### Norma $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas en tiempo discreto

Sea el sistema con representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1[k] \\ \mathbf{z}_1[k] &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}_1[k] \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

La función de transferencia de  $\mathbf{w}_1$  a  $\mathbf{z}_1$  es

$$\mathbf{G}(z) = T_{\mathbf{z}_1 \mathbf{w}_1} = \mathbf{C}_1 (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}$$

De forma similar al caso continuo se tiene el siguiente teorema relacionado con la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de un sistema:

**Teorema 1.4.2.** *La norma  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema (1.4.9) es*

$$\|T_{\mathbf{w}_1 \mathbf{z}_1}\|_\infty^2 = \text{mín } \gamma$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} & \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}'_1 \\ \mathbf{B}'_1\mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{B}'_1\mathbf{P}\mathbf{B}_1 - \gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{11} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

De forma dual

$$\|T_{\mathbf{w}_1 \mathbf{z}_1}\|_\infty^2 = \text{mín } \gamma$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{AQA}' - \mathbf{Q} & \mathbf{B}'_1 \mathbf{QA} & \mathbf{C}'_1 \\ \mathbf{A}'\mathbf{QB}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{QB}'_1 - \gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}'_{11} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

## 1.5. Sistemas con Incertidumbres

Los sistemas con incertidumbre tienen la siguiente representación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2(\nu)\mathbf{u}(t) \quad (1.5.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de control,  $\mathbf{A}(\nu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B}_2(\nu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  son las matrices dinámica y de entrada del sistema, funciones de  $\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ , vector desconocido que representa la incertidumbre del sistema, que puede ser o no invariante en el tiempo.

En el desarrollo de este trabajo se han estudiado 2 tipos de ellas:

1. Incertidumbre limitada en norma.
2. Incertidumbre politópica.

Ambos tipos de conjuntos son convexos y de su representación pueden extraerse soluciones.

### 1.5.1. Incertidumbres Limitadas en Norma

Sea  $\mathbf{A}_n$  una matriz constante en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  matrices constantes y conocidas de dimensiones  $n \times q$  y  $q \times n$  respectivamente.  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  es una matriz que puede variar en el tiempo y de la que sólo se conoce que:

$$\mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \mathbf{I}$$

Se puede definir la incertidumbre acotada en norma de la forma:

$$\mathbf{A}(\nu) \in \mathcal{D}_A : \{\mathbf{A}, \mathbf{A} = \mathbf{A}_n + \mathbf{DVE} \quad \forall \quad \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \mathbf{I}\} \quad (1.5.2)$$

Debe observarse que  $\mathbf{A}$  es un conjunto convexo elíptico con  $\mathbf{A}_n$  siempre en el centro del conjunto. De la misma forma, debe tenerse claro que  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  definen la estructura de la incertidumbre, la forma como ella afecta el sistema nominal  $\mathbf{A}_n$ .

### 1.5.2. Incertidumbres Politópicas

Sea  $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r\}$  un conjunto de matrices de dimensión  $n \times n$ .  
Sea  $\mathbf{A}$ , la incertidumbre politópica, el conjunto definido por:

$$\mathbf{A}(\nu) \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} : \left\{ \mathbf{A}, \mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \nu_i \mathbf{A}_i; \sum_{i=1}^N \nu_i = 1; \nu_i \geq \mathbf{0} \right\} \quad (1.5.3)$$

es decir, la combinación convexa de las matrices vértice  $\mathbf{A}_i$ .

Se puede notar que a diferencia de los sistemas con incertidumbre limitada en norma, en los sistemas con incertidumbre politópica no hay una matriz nominal del sistema.

## 1.6. Estabilidad

Existen diversos test de estabilidad para sistemas con y sin incertidumbres, a partir de los cuales se fundamentan distintos enfoques de la teoría del control robusto. Este trabajo basa gran parte de su desarrollo en la teoría de estabilidad de Lyapunov y el procedimiento desarrollado por Lur'e, que facilita la aplicación de los teoremas desarrollados por Lyapunov.

### Segundo método de Lyapunov y Estabilidad Cuadrática

Se desea encontrar una función de Lyapunov escalar que es evaluada para condiciones que indican estabilidad. Normalmente, la selección de dicha función es un trabajo complicado, e incluso el hecho de que no se encuentre dicha función no quiere decir que no exista. Sin embargo, Lur'e desarrolló un procedimiento para encontrar una función de Lyapunov que será cuadrática con respecto al vector de estado del sistema, para la cual sólo se necesita encontrar una matriz definida positiva tal que se cumplan ciertas condiciones con ayuda (uso) de la matriz dinámica del sistema.

#### 1.6.1. Sistemas de Tiempo Continuo

Considere el sistema de tiempo continuo sin excitación con representación de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1.6.1)$$

La función de Lyapunov para este sistema está dada por

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{x} \quad (1.6.2)$$



Para que el sistema sea estable la función de Lyapunov debe ser positiva, al ser (1.6.2) una forma cuadrática, para que la función de Lyapunov sea positiva sólo basta con que seleccionar  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ , es decir, la matriz  $\mathbf{P}$  debe ser definida positiva. Además, para que el sistema sea estable, la derivada de la función de Lyapunov debe ser negativa, de donde se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}$$

utilizando (1.6.1) para expresar  $\dot{\mathbf{x}}$  se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}'(\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A})\mathbf{x}$$

Obteniendo nuevamente una forma cuadrática, el hecho de que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  sea negativa, implica que

$$\mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < \mathbf{0}$$

De donde finalmente se obtiene la condición de estabilidad para el sistema 1.6.1:  
*El sistema (1.6.1) será estable si, y solamente si*

*Existe  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} &< \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

*De forma dual, también se puede escribir la condición de estabilidad como*

*Existe  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$  tal que*

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}' + \mathbf{A}\mathbf{P} &< \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

### 1.6.2. Sistemas de Tiempo Discreto

Considere el sistema de tiempo continuo sin excitación con representación de estado

$$\mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[k] \quad (1.6.5)$$

La función de Lyapunov para este sistema está dada por

$$V(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}'_k \mathbf{P} \mathbf{x}_k \quad (1.6.6)$$

Al igual que en el caso continuo, para que el sistema sea estable la función de Lyapunov debe ser positiva, entonces sólo basta con que seleccionar  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ , es decir, la matriz  $\mathbf{P}$  debe ser definida positiva. Además, para que el sistema sea estable, el incremento de la función de Lyapunov debe ser negativo, de donde se tiene

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}_k) &= V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) \\ \Delta V(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{x}'_{k+1} \mathbf{P} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}'_k \mathbf{P} \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

utilizando (1.6.6) para expresar  $\mathbf{x}_{k+1}$  se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'_k \mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{x}'_k \mathbf{P} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}'_k (\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}_k$$

Obteniendo nuevamente una forma cuadrática, el hecho de que  $\Delta V(\mathbf{x}_k)$  sea negativo, implica que

$$\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < \mathbf{0}$$

De donde finalmente se obtiene la condición de estabilidad para el sistema 1.6.5:

*El sistema (1.6.5) será estable si, y solamente si*

*Existe  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}' \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < \mathbf{0}$$

Utilizando el complemento de Schur para expresar la segunda desigualdad de (1.6.2) como LMI se tiene que *el sistema (1.6.5) será estable si, y solamente si*

Existe  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} \\ \mathbf{P}\mathbf{A}' & \mathbf{P} \end{bmatrix} &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

O de forma dual

Existe  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$  tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q}\mathbf{A} \\ \mathbf{A}'\mathbf{Q} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} &> \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

*Al partir de formas cuadráticas para llegar a las funciones de Lyapunov, y utilizando matrices dinámicas inciertas, el análisis de estabilidad previamente estudiado en los casos continuo y discreto, recibe el nombre de ESTABILIDAD CUADRÁTICA.*

## 1.7. Funciones de Lyapunov Dependientes de Parámetros, $\mathcal{FLDP}$ s

La estabilidad cuadrática al ser aplicada sobre sistemas inciertos con incertidumbres politópicas puede ser, algunas veces, muy conservativa, ya que la misma matriz de Lyapunov  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  debe verificar la condición de estabilidad para todos los vértices del dominio de la incertidumbre. Una prueba menos conservativa para la estabilidad robusta de sistemas inciertos es dada por el siguiente lema:

**Lema 1.7.1.** *Si existen matrices de Lyapunov definidas positivas  $\mathbf{P}_i, i = 1, \dots, N$  tales que:*

$$\mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i - \mathbf{P}_i < \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \mathbf{A}'_i \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i < \mathbf{0}$$

entonces, para cualquier  $\mathbf{A}(\nu) \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}$  en (1.5.3),  $\mathbf{P}(\nu)$  dada por

$$\mathbf{P}(\nu) = \sum_{i=1}^N \nu_i \mathbf{P}_i; \quad \sum_{i=1}^N \nu_i = 1; \quad \nu_i \geq 0 \quad (1.7.1)$$

es una *función de Lyapunov dependiente de parámetros defenida positiva tal que*

$$\mathbf{A}'(\nu) \mathbf{P}(\nu) \mathbf{A}(\nu) - \mathbf{P}(\nu) < \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \mathbf{A}'(\nu) \mathbf{P}(\nu) + \mathbf{P}(\nu) \mathbf{A}(\nu) < \mathbf{0}.$$

*Cuando se trabaja con funciones de Lyapunov dependientes de parámetros en el análisis de estabilidad de sistemas, se habla de una aproximación por FLDPs.*

# Capítulo 2

## Estabilidad y Estabilidad Robusta

En este capítulo se trata inicialmente el enfoque convencional del criterio de estabilidad de Lyapunov para sistemas sin incertidumbres, tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto, expresándolo por medio de LMIs, posteriormente se extiende dicho criterio para sistemas con incertidumbres tanto limitadas en norma como politópicas, éstas últimas tratadas desde los enfoques cuadrático y de FLDP.

### 2.1. Estabilidad

#### 2.1.1. Sistemas de Tiempo Continuo

Sea el sistema de tiempo continuo con representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

### Realimentación de Estado

Sea el sistema (2.1.1) con una ley de control  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ , la representación de estado resulta ser

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12})\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

**Problema 2.1.1.** *Determinar un controlador  $\mathbf{K}$  tal que el sistema (2.1.2) sea estable.*

**Teorema 2.1.2.** *El sistema (2.1.2) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}\tag{2.1.3}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' < \mathbf{0}$$

*$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$*

### Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (2.1.1) y se tiene un controlador con la siguiente representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t)\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Siendo el vector de estado del controlador,  $\mathbf{x}_c$ , un vector columna de  $n$  elementos, al igual que el vector de estados del sistema,  $\mathbf{x}$ , por lo que las dimensiones de las matrices del controlador,  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$ , son iguales a las dimensiones de las matrices del sistema,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  respectivamente. Reemplazando la ley de control de (2.1.4) en la ecuación de estado y en la ecuación de salida controlada en (2.1.1) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t)\end{aligned}$$

Remplazando la ecuación para la salida medible del sistema en la ecuación de estado del controlador

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(t)$$

Organizando las expresiones para la representación de estado tanto del sistema como del controlador de se tiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \mathbf{w}$$

$$\mathbf{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$
(2.1.5)

**Problema 2.1.3.** Determinar  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  que estabilicen el sistema (2.1.5).

Para que el sistema (2.1.5) sea estable es necesario que:

Existe  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$  tal que

$$\mathcal{P} > \mathbf{0}$$
(2.1.6)

$$\mathcal{A}'\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A} < \mathbf{0}$$

Que es una BMI, sin embargo, al hacer algunas manipulaciones matemáticas se puede llegar al siguiente teorema:

**Teorema 2.1.4.** El sistema (2.1.5) será estable si

Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$
(2.1.7)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2'\mathbf{L}' \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$
(2.1.8)

*LM* en  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ .

con  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{C}_c\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{A}'_c\mathbf{U}'$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{C}'_2\mathbf{L}'$  y  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{Z} + \mathbf{M}$ .

Las desigualdades (2.1.7) y (2.1.8) son restricciones LMI que tienen solución para  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , de donde se obtienen las matrices  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  y  $\mathcal{P}$  tal que el sistema con realimentación de salida sea estable, así:

1.  $\mathbf{C}_c = \mathbf{R}(\mathbf{V}')^{-1}$ .
2. Seleccionar  $\mathbf{V}$ , debe ser una matriz regular.
3. Determinación de  $\mathbf{U}$  a partir de (??),  $\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y})(\mathbf{V}')^{-1}$ . ( $\mathbf{U}$  es regular.)
4.  $\mathbf{B}_c = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}$ .
5. Cálculo de  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{M}$ , teniendo en cuenta que  $\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}} - \mathbf{Z}$ .
6.  $\mathbf{A}'_c = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{U}')^{-1}$ .
7. Cálculo de  $\hat{\mathbf{X}}$  a partir de (??),  $\hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{U}'\mathbf{Y}(\mathbf{V}')^{-1}$ .
8. Determinación de  $\mathcal{P}$  a partir de su definición en (??),

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

### 2.1.2. Sistemas de Tiempo Discreto

Sea el sistema de tiempo discreto con representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k] \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

#### Realimentación de Estado

Nuevamente, sea el sistema (2.1.9) con una ley de control  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}\mathbf{x}[k]$ , la representación de estado resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12})\mathbf{x}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k] \end{aligned} \tag{2.1.10}$$



**Problema 2.1.5.** *Determinar un controlador  $\mathbf{K}$  tal que el sistema (2.1.10) sea estable.*

**Teorema 2.1.6.** *El sistema (2.1.10) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que*

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} \\ \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.1.11)$$

$$\mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}. \quad (2.1.12)$$

**Demostración:**

La condición de estabilidad para el sistema (2.1.10) es

Existe  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{P} \\ \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})' & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Definiendo  $\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ , se tiene (2.1.11)

### Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (2.1.9) y se tiene un controlador con la siguiente representación de estado

$$\mathbf{x}_c[k+1] = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c\mathbf{y}[k]$$

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c[k] \quad (2.1.13)$$

Siendo el vector de estado del controlador,  $\mathbf{x}_c$ , un vector columna de  $n$  elementos, al igual que el vector de estados del sistema,  $\mathbf{x}$ , por lo que las dimensiones de las

matrices del controlador,  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$ , son iguales a las dimensiones de las matrices del sistema,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  respectivamente. Reemplazando la ley de control de (2.1.13) en la ecuación de estado y la ecuación de salida controlada,  $\mathbf{z}[k]$ , en (2.1.9) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c[k]\end{aligned}$$

Reemplazando la ecuación de salida medible,  $\mathbf{y}[k]$ , en la ecuación de estado del controlador en (2.1.13) se tiene

$$\mathbf{x}_c[k+1] = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k]$$

Organizando las expresiones para la representación de estado del controlador y del sistema, se tiene

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}_c[k+1] \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}[k+1]} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \mathbf{w}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}[k]}\end{aligned}\tag{2.1.14}$$

**Problema 2.1.7.** *Determinar  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  que estabilicen el sistema (2.1.14).*

Para que el sistema (2.1.14) sea estable es necesario que:

Existe  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$  tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{A}'\mathcal{P} \\ \mathcal{P}\mathcal{A} & \mathcal{P} \end{bmatrix} &> \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.1.15}$$

De la misma forma que en el caso continuo, se tiene que (2.1.15) es una BMI y que luego de algunas manipulaciones matemáticas se puede llegar al siguiente teorema sobre la estabilidad del sistema (2.1.14):

**Teorema 2.1.8.** *El sistema (2.1.14) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.1.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 \\ (\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.1.17)$$

con  $\mathbf{L} = \mathbf{UB}_c$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{C}_c\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{VA}'_c\mathbf{U}'$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{YAX} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{YC}'_2\mathbf{L}'$  y  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{Z} + \mathbf{M}$ .

Notese que para este caso, a diferencia del caso continuo, en la definición de la matriz  $\mathbf{Z}$ , no se incluye la matriz  $\mathbf{A}$ .

Las desigualdades (2.1.16) y (2.1.17) son restricciones LMI que tienen solución para  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , de donde se obtienen las matrices  $\mathbf{A}_c$ ,  $\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{C}_c$  y  $\mathcal{P}$  tal que el sistema con realimentación de salida sea estable, el procedimiento a seguir para la determinación del controlador es similar a la que se expuso en el caso continuo, teniendo en cuenta la redefinición de  $\mathbf{Z}$ .

## 2.2. Estabilidad Robusta

Los criterios de estabilidad de Lyapunov para sistemas ciertos tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto vistos en la sección anterior, pueden ser extendidos para sistemas inciertos, de la forma que se mostrará a continuación.

### 2.2.1. Sistemas en Tiempo Continuo

Sea el sistema incierto de tiempo continuo, con la siguiente representación de estado

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

El sistema (2.2.1) será estable si, y solamente si

$$\begin{aligned}
 &\text{Existe } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ tal que} \\
 &\quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \\
 &\quad \mathbf{A}(\nu)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}'(\nu) < \mathbf{0} \\
 &\quad \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P}.
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

### Realimentación de Estado

Nuevamente, sea el sistema (2.2.1) con una ley de control  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ , la representación de estado resulta ser

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) \\
 \mathbf{z}(t) &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12})\mathbf{x}(t) \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

**Problema 2.2.1.** *Determinar  $\mathbf{K}$  tal que  $(\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})$  sea asintóticamente estable  $\forall \nu$ .*

**Teorema 2.2.2.** *El sistema (2.2.3) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned}
 &\text{Existen } \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ tal que} \\
 &\quad \mathbf{P} > \mathbf{0} \\
 &\quad \mathbf{A}(\nu)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}'(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' < \mathbf{0} \\
 &\quad \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

#### ■ Incertidumbres Politópicas

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3).

Para solucionar el problema de estabilidad robusta de sistemas con incertidumbres politópicas se tienen dos aproximaciones:

### Aproximación Cuadrática

**Teorema 2.2.3.** *El sistema (2.2.1) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.3) será estable si*

$$\begin{aligned}
 & \text{Existen } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ y } \mathbf{R} \text{ tales que} \\
 & \mathbf{P} > \mathbf{0} \\
 & \mathbf{A}_i \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 < \mathbf{0} \\
 & \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N. \\
 & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

### Aproximación por FLDP

**Teorema 2.2.4.** *El sistema (2.2.1) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.3) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned}
 & \text{Existen } \mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i, \mathbf{G}, \mathbf{R} \text{ y } 0 < \epsilon \text{ (escalar), tales que} \\
 & \mathbf{P}_i > \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{G}' \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i \\ \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\
 & \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N. \\
 & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P}_i, \mathbf{G}, \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{G}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

### Demostración:

Haciendo la sumatoria sobre  $i$  de la multiplicación de  $\nu_i$  por la desigualdad (2.2.6) y reemplazando  $\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{G}$  se tiene

$$\sum_{i=1}^N \nu_i \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) \mathbf{G} + \mathbf{G}' (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{K})' & \epsilon((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) \mathbf{G}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i \\ \epsilon((\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{K}) \mathbf{G})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

que, utilizando la definición para  $\mathbf{A}(\nu)$  de (1.5.3) y definiendo  $\mathbf{P}(\nu)$  como

$$\mathbf{P}(\nu) \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}} : \left\{ \mathbf{P}, \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \nu_i \mathbf{P}_i; \sum_{i=1}^N \nu_i = 1; \nu_i \geq \mathbf{0} \right\} \tag{2.2.7}$$

puede ser escrita como

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{G} + \mathbf{G}'(\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})' & \epsilon((\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{G}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}(\nu) \\ \epsilon((\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{G})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}(\nu) & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.2.8)$$

multiplicando (2.2.8) a la izquierda por  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K}) \end{bmatrix}$  y a la derecha por  $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K}) \end{bmatrix}'$  se tiene

$$(\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{P}(\nu) + \mathbf{P}(\nu)(\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})' < \mathbf{0}$$

Lo que indica que  $(\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})$  es asintóticamente estable.

Cabe anotar que del teorema 2.2.4 se obtiene directamente el teorema 2.2.3 al hacer las siguientes aproximaciones:  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}$  y  $\mathbf{G} = \mathbf{P}$  y  $\epsilon \rightarrow \mathbf{0}$ .

#### ▪ Incertidumbres Limitadas en Norma

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2), por lo que la estabilidad de este sistema está dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.5.** *El sistema (2.2.1) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.2) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned} & \text{Existen } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ y } \mathbf{R} \text{ tales que} \\ & \mathbf{P} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{AP} + \mathbf{PA}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' & \mathbf{PE}' & \mathbf{D} \\ \mathbf{EP} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.2.9) \\ & \forall \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma^{-1}\mathbf{I} \\ & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{RP}^{-1}. \end{aligned}$$

### Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (2.2.1) y se tiene un controlador con la siguiente representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t)\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

Remplazando la ley de control de (2.2.10) en la ecuación de estado y la ecuación de salida controlada en (2.2.1) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\nu) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c(t)\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

remplazando la ecuación de salida medible de (2.2.1) en la ecuación de estado del controlador se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(t)\tag{2.2.12}$$

Organizando (2.2.11) y (2.2.12) se tiene

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}'} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\nu) & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'}\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

**Problema 2.2.6.** *Determinar  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  que estabilicen el sistema (2.2.13).*

Para que el sistema (2.2.13) sea estable es necesario que:

$$\begin{aligned}\text{Existe } \mathcal{P} = \mathcal{P}' \text{ tal que} \\ \mathcal{P} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathbf{A} &< \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

Como se vió en la sección anterior, (2.2.14) es una BMI, sin embargo se puede llegar al siguiente teorema para la estabilidad de (2.2.13).

**Teorema 2.2.7.** *El sistema (2.2.13) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.2.15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\nu)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}'(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'(\nu)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}'_2\mathbf{L}' \end{bmatrix} < 0$$

con  $\mathbf{L} = \mathbf{U}\mathbf{B}_c$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{C}_c\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{V}\mathbf{A}'_c\mathbf{U}'$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{A}(\nu) + \mathbf{Y}\mathbf{A}(\nu)\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{C}'_2\mathbf{L}'$  y  $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{Z} + \mathbf{M}$ .

### ■ Incertidumbres Politópicas

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), para el problema de estabilidad de sistemas con incertidumbres politópicas se tiene:

### Aproximación Cuadrática

**Teorema 2.2.8.** *El sistema (2.2.13) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida por (1.5.3) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.2.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{M} + \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{M}' + \mathbf{Z}'_i & \mathbf{A}'_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}'_2\mathbf{L}' \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

con  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{M}$  definidas igual que en el teorema 2.2.7 y  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{Y}\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{C}'_2\mathbf{L}'$ .

Se puede observar que (2.2.16) es equivalente a tener  $i$  desigualdades de la forma (2.2.15) con  $\mathbf{A}(\nu)$  constante, donde nuevamente  $i$  equivale al número de vértices del politopo donde se define la incertidumbre del sistema.

(2.2.16) son un conjunto de BMIs irreducibles a LMIs. Para ellas existen soluciones tentativas por PNL, técnicas de relajación, sin embargo, la convergencia no está garantizada.



▪ **Incertidumbres Limitadas en Norma**

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2), por lo que la estabilidad de este sistema está dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.9.** *El sistema (2.2.13) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.2) será estable si*

*Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.2.17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{D} & \mathbf{Y} \mathbf{E}' \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'_n \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_n + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L}' + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 & \mathbf{X} \mathbf{D} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}' \mathbf{X} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \mathbf{Y} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{V} : \mathbf{V}' \mathbf{V} \leq \gamma^{-1} \mathbf{I}$$

*$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ .*

con  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  definidas igual que en el teorema 2.2.7 y  $\mathbf{Z} = \mathbf{A}_n + \mathbf{Y} \mathbf{A}_n \mathbf{X} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_1 \mathbf{X} + \mathbf{Y} \mathbf{C}'_2 \mathbf{L}'$ .

Las desigualdades en el teorema 2.2.9 son LMIs con solución para  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , de donde se obtienen directamente  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  y  $\mathcal{P}$ , utilizando un procedimiento muy similar al que se utilizó luego del teorema 2.1.4.

## 2.2.2. Sistemas en Tiempo Discreto

Sea el sistema de tiempo discreto con la siguiente representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}(\nu) \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}[k] + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}[k] \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

El sistema (2.2.18) será estable si, y solamente si

Existe  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}(\nu) \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}'(\nu) & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.2.19)$$

### Realimentación de Estado

Nuevamente, sea el sistema (2.2.18) con una ley de control  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}\mathbf{x}[k]$ , la representación de estado resulta ser

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12})\mathbf{x}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k]\end{aligned}\tag{2.2.20}$$

**Problema 2.2.10.** *Determinar  $\mathbf{K}$  tal que  $(\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})$  sea asintóticamente estable  $\forall \nu$ .*

**Teorema 2.2.11.** *El sistema (2.2.20) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned}& \text{Existen } \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ tal que} \\ & \mathbf{P} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}(\nu)\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} \\ \mathbf{P}\mathbf{A}'(\nu) + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0}\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

#### ■ Incertidumbres Politópicas

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3). Al igual que en el caso continuo, para solucionar el problema de estabilidad robusta de sistemas con incertidumbres politópicas se tienen dos aproximaciones:

#### Aproximación Cuadrática

La estabilidad de este tipo de sistemas está dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.12.** *El sistema (2.2.20) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.3) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned}& \text{Existen } \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ tal que} \\ & \mathbf{P} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} \\ \mathbf{P}\mathbf{A}'_i + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ & \forall i = 1, 2, \dots, N. \\ & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.2.22}$$

Se puede observar que (2.2.22) es equivalente a tener  $i$  desigualdades de la forma (2.2.21) con  $\mathbf{A}(\nu)$  constante, donde nuevamente  $i$  equivale al número de vértices del politopo donde se define la incertidumbre del sistema.

### Aproximación por FLDP

**Teorema 2.2.13.** *El sistema (2.2.20) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.3) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned} & \text{Existen } \mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i, \mathbf{H} \text{ y } \mathbf{R} \text{ tales que} \\ & \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} \\ \mathbf{G}' \mathbf{A}'_i + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & -\mathbf{H} - \mathbf{H}' + \mathbf{P}_i \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N. \\ & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{H}, \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P}_i, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{G}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

#### ■ Incertidumbres Limitadas en Norma

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2), por lo que la estabilidad de este sistema está dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.14.** *El sistema (2.2.20) con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.2) será estable si, y solamente si*

$$\begin{aligned} & \text{Existen } \mathbf{P} = \mathbf{P}' \text{ y } \mathbf{R} \text{ tales que} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} & \mathbf{P} \mathbf{E}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}' + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ & \quad \forall \quad \mathbf{V}' \mathbf{V} < \gamma^{-1} \mathbf{I} \\ & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

$$(2.2.25)$$

### Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (2.2.18) y se tiene un controlador con la siguiente representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c[k+1] &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c \mathbf{y}[k] \\ \mathbf{u}[k] &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c[k] \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Remplazando la ley de control de (2.2.26) en la ecuación de estado y la ecuación de salida controlada en (2.2.18) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c[k]\end{aligned}\quad (2.2.27)$$

Remplazando la ecuación de salida medible de (2.2.18) en la ecuación de estado del controlador de (2.2.26) se tiene

$$\mathbf{x}_c[k+1] = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c[k] + \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k] \quad (2.2.28)$$

Organizando (2.2.27) y (2.2.28) se tiene

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}_c[k+1] \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}[k+1]} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\nu) & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} \mathbf{w}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix}}_{\mathcal{X}[k]}\end{aligned}\quad (2.2.29)$$

**Problema 2.2.15.** *Determinar  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  que estabilicen el sistema (2.2.29).*

Para que el sistema (2.2.29) sea estable es necesario que:

Existe  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$  tal que

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &> \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{P}\mathcal{A} \\ \mathcal{A}'\mathcal{P} & \mathcal{P} \end{bmatrix} &> \mathbf{0}\end{aligned}\quad (2.2.30)$$

Como se vió en el caso continuo (2.2.30) es una BMI, que puede ser transformada a LMI obteniendo el siguiente teorema para la estabilidad del sistema (2.2.29):

**Teorema 2.2.16.** *El sistema (2.2.29) será estable si, y solamente si*

*Existe  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} & (2.2.31) \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}(\nu)\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A}(\nu) \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{X}\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \\ (\mathbf{A}(\nu)\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned}$$

El procedimiento para encontrar  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c)$  es similar al presentado después de la demostración del teorema 2.1.4, luego de encontrar las matrices  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ .

#### ■ Incertidumbres Politópicas

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), sin embargo para el problema de estabilidad de sistemas con incertidumbres politópicas se tiene para la **aproximación cuadrática**:

**Teorema 2.2.17.** *El sistema (2.2.29) con  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} & (2.2.32) \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A}_i \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{M} + \mathbf{Z}_i & \mathbf{X}\mathbf{A}_i + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{M}' + \mathbf{Z}'_i & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}'_i & (\mathbf{X}\mathbf{A}_i + \mathbf{L}\mathbf{C}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned}$$

con  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{M}$  definidas igual que en el teorema 2.2.7 y  $\mathbf{Z}_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{Y}\mathbf{A}_i\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_1\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{C}'_2\mathbf{L}'$ .

Se puede observar que (2.2.32) es equivalente a tener  $i$  desigualdades de la forma (2.2.31) con  $\mathbf{A}(\nu)$  constante, donde nuevamente  $i$  equivale al número de vértices del politopo donde se define la incertidumbre del sistema.

(2.2.32) son un conjunto de BMIs irreducibles a LMIs. Para ellas existen soluciones tentativas por PNL, técnicas de relajación, sin embargo, la convergencia no está garantizada.

▪ **Incertidumbres Limitadas en Norma**

Aquí la matriz dinámica del sistema incierto,  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2), por lo que la estabilidad de este sistema está dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.18.** *El sistema (2.2.29) con  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2) será estable si, y solamente si*

*Existen  $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.2.33)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 & \mathbf{XD} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{YE}' \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}'\mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{EY} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma^{-1}\mathbf{I}$$

*$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ .*

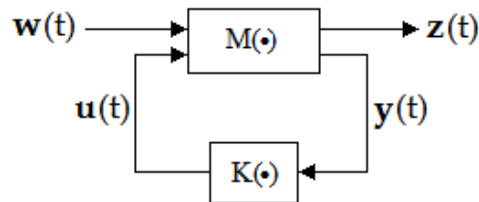
# Capítulo 3

## Síntesis $\mathcal{H}_2$

En este capítulo se trabaja el problema de síntesis de controladores, por realimentación de estado y por realimentación de salida, que estabilicen un sistema y minimicen una cota superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  de la función de transferencia de la entrada externa,  $\mathbf{w}$ , a la salida controlada,  $\mathbf{z}$ .

### 3.1. Síntesis $\mathcal{H}_2$ en Tiempo Continuo

Sea el sistema



Con representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

**Problema 3.1.1.** *El problema  $\mathcal{H}_2$  consiste en sintetizar una ley de control  $\mathbf{u}(t)$  que estabilice el sistema (3.1.1) y minimice una cota superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  de la función de transferencia de  $\mathbf{w}$  a  $\mathbf{z}$ , es decir*

$$\min \|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \leq \mu \quad \forall \nu$$

### 3.1.1. Realimentación de Estado

Con una ley de control  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})\mathbf{x} \quad (3.1.3)$$

La función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}$  a la salida medible,  $\mathbf{z}$ , del sistema (3.1.1) es

$$T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\nu) - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1$$

#### ▪ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , por lo que haciendo similitudes de las ecuaciones (1.3.4) y (1.3.5) con las ecuaciones (3.1.2) y (4.2.2), utilizando el cálculo de la norma  $\mathcal{H}_2$  con el gramiano de controlabilidad,  $\mathbf{P}$ , se tiene

$$\min_k \text{Traza} [(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})\mathbf{P}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})']$$

Sujeto a

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})' + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' \leq \mathbf{0}$$

Que equivale a

$$\min_k \text{Traza} [\mathbf{W}]$$

Sujeto a

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})\mathbf{P}\underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}}_{\mathbf{I}}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})' - \mathbf{W} \leq \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})' + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1' \leq \mathbf{0}$$



Utilizando el complemento de Schur y haciendo  $\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ , para llevar el problema a un problema de optimización con LMIs

$$\min_k \text{Traza}[\mathbf{W}]$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K}) \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})' & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2}^{\text{Condición de Estabilidad}} & \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{B}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$ .

De manera alternativa, utilizando el cálculo de la norma  $\mathcal{H}_2$  con el gramiano de observabilidad,  $\mathbf{Q}$ , se tiene

$$\min_k \text{Traza}[\mathbf{W}]$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{bmatrix} \overbrace{\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2}^{\text{Condición de Estabilidad}} & (\mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$ .

Como se puede observar tanto en (3.1.4) como en (3.1.5), la formulación de los problemas de síntesis  $\mathcal{H}_2$  incluye las expresiones de estabilidad desarrolladas en el capítulo anterior, por lo que se utilizarán dichos resultados en el posterior desarrollo.

### Caso con incertidumbres

El problema, se subdivide en dos problemas:

**Problema 3.1.2.** Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t))$  que estabilice el sistema y minimice

$$\left[ \max_{\nu} \|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \right]$$

Debido a la complejidad matemática que representa la solución del problema 3.1.2, se plantea una aproximación subóptima como el siguiente problema:

**Problema 3.1.3.** Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t))$  que estabilice el sistema y minimice un límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  para toda realización del sistema dentro del dominio de incertidumbres, es decir:

$$\text{mín } \mu$$

*Sujeto a*

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \leq \mu, \quad \forall \nu$$

Que también puede tratarse como un problema diferente, consistente en satisfacer una respuesta a priori, es decir:

*Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t))$  que estabilice el sistema de manera que:*

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \leq \mu$$

### ▪ Incertidumbres politópicas

#### Aproximación Cuadrática

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3). Una solución al problema de la minimización de un límite superior de  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \forall \nu$  utilizando el gramiano de observabilidad,  $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1}$ , es:

$$\text{mín}_k \text{ Traza } [W]$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & (\mathbf{C}_1 \mathbf{S} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}) \\ (\mathbf{C}_1 \mathbf{S} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}$ .

En forma alternativa, otra formulación está dada por

$$\text{mín } \mu$$

Sujeto a

$$\text{Traza } \mathbf{W} \leq \mu$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

$$i = 1, 2, \dots, n_a$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$ .

### Aproximación por $\mathcal{FLDPs}$

Nuevamente  $\mathbf{A}(\nu)$  está expresada por (1.5.3). Una formulación al problema de la minimización de un límite superior de  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \forall \nu$  es:

$$\text{mín } \mu$$

$$\text{Traza } [\mathbf{W}_i] \leq \mu$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{C}_{12}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' & -(\mathbf{G} + \mathbf{G}') + \mathbf{P}_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \text{Condición de Estabilidad} & & \\ \hline \mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{G}'\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \epsilon(\mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i & \mathbf{B}_{12} \\ \epsilon(\mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right] \leq \mathbf{0}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1}$ .

(3.1.6)

### ■ Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2). El problema puede ser expresado como:

**Problema 3.1.4.** Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t))$  tal que  $(\mathbf{A}_n + \mathbf{DVE} + \mathbf{B}_2 + \mathbf{K})$  sea asintóticamente estable y minimice un límite superior de  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2$ ,  $\mu$ , para cualquiera sea  $\mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma\mathbf{I}$ .

La formulación de este problema puede expresarse utilizando el gramiano de observabilidad,  $\mathbf{Q}$ , como:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \mu \\
 & \text{Sujeto a} \\
 & \text{Traza } \mathbf{W} \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{S} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{3.1.7} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{S}\mathbf{E}' & \mathbf{D} & (\mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{E}\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{S} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
 & \forall \mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma\mathbf{I} \\
 & \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{S} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}.
 \end{aligned}$$

De forma similar utilizando el gramiano de controlabilidad,  $\mathbf{P}$ , y la expresión para la estabilidad robusta de sistemas continuos con incertidumbres limitadas en norma de (2.2.9), se tiene

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \mu \\
 & \text{Sujeto a} \\
 & \text{Traza } \mathbf{W} \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{W} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{3.1.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} \mathbf{E}' & \mathbf{D} & \mathbf{B}_1 \\ & \mathbf{E} \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{D}' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{V} : \mathbf{V}' \mathbf{V} \leq \gamma \mathbf{I}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1}$ .

**Observación 3.1.5.** Como se puede observar de (3.1.7) y (3.1.8), las aproximaciones utilizando los gramianos tanto de controlabilidad como de observabilidad proporcionan formas similares, de una se puede llegar a la otra cambiando  $\mathbf{P}$  por  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{B}_1$  por  $(\mathbf{C}_1 \mathbf{S} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})'$  y  $(\mathbf{C}_1 \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})$  por  $\mathbf{B}'_1$ , o viceversa.

### 3.1.2. Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (3.1.1).

**Problema 3.1.6.** Encontrar una ley de control  $u(y)$  que estabilice el sistema y minimice un límite de  $\|T_{zw}\|_2^2$ ,  $\forall \nu$ .

#### ▪ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , para minimizar el límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema con un controlador como el definido en (2.1.4), se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.7.** La dinámica del controlador que minimiza el límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (2.1.14) esta dada como la solución de

$$\text{mín } \mu$$

Sujeto a

$$\text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}' + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}' \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L} & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , cuyas definiciones son iguales a las del teorema 2.1.4, y corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que minimizan  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2$ .

### Caso con incertidumbres

**Problema 3.1.8.** Determinar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que estabilizan el sistema y minimizan  $\mu$ , de tal forma que  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \leq \mu$ ,  $\forall \nu$ .

#### ▪ Incertidumbres politópicas

### Aproximación Cuadrática

Como en el caso de la realimentación de estados la matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), y el problema de síntesis  $\mathcal{H}_2$  consiste en:

**Teorema 3.1.9.** La dinámica del controlador que minimiza el limite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (2.2.13) esta dada como la solución de

$$\text{mín } \mu$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} & \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{YA}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{Z}_i + \mathbf{M} & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ (\mathbf{Z}_i + \mathbf{M})' & \mathbf{A}'_i\mathbf{X} + \mathbf{XA}_i + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2\mathbf{L} & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Que es una BMI, debido a la presencia de los términos  $\mathbf{Z}_i$ , cuya resolución se puede llevar a cabo por medio de PNL, sin embargo, la convergencia del problema no puede ser garantizada.

■ **Incertidumbres limitadas en norma**

Como en el caso de la realimentación de estados  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2). El problema de síntesis  $\mathcal{H}_2$  se puede formular como

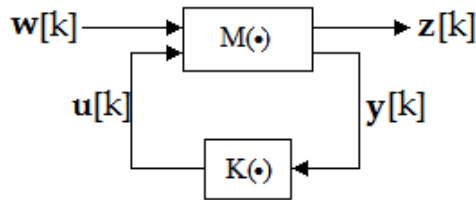
**Teorema 3.1.10.** *La dinámica del controlador que minimiza el límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (2.2.13), con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (1.5.2), esta dada como la solución de*

$$\begin{aligned} & \text{mín } \mu \\ & \text{Sujeto a} \\ & \text{Traza} [\mathbf{W}] \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{YA}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{D} & \mathbf{YE}' \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'_n \mathbf{X} + \mathbf{XA}'_n + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L} & \mathbf{C}'_1 & \mathbf{XD} & \mathbf{E}' \\ (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}' \mathbf{X} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{EY} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , que corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que minimizan  $\|T_{zw}\|_2^2$ .

## 3.2. Síntesis $\mathcal{H}_2$ en Tiempo Discreto

Sea el sistema



Con representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k] \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

El problema  $\mathcal{H}_2$ , está definido de la misma forma que para el tiempo continuo.

### 3.2.1. Realimentación de Estado

Con una ley de control  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}\mathbf{x}[k]$

$$\mathbf{x}[k+1] = (\mathbf{A}(\nu) + \mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{z}[k] = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})\mathbf{x}[k] \quad (3.2.3)$$

La función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}_k$  a la salida  $\mathbf{z}_k$  del sistema de la figura es

$$T_{\mathbf{z}_k\mathbf{w}_k} = (z\mathbf{I} - \mathbf{A}(\nu) - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1$$

#### ■ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , por lo que haciendo similitudes de las ecuaciones (5.2.6) y (5.3.2) con las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3), utilizando el cálculo de la norma  $\mathcal{H}_2$  con el gramiano de controlabilidad,  $\mathbf{P}$ , se tiene

**Teorema 3.2.1.** *El controlador que minimiza el limite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (3.2.1) esta dada como la solución de*

$$\min_k \text{Traza}[\mathbf{W}]$$

Sujeto a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$ .



### Caso con incertidumbres

El sistema que es de la misma forma al descrito por (3.2.1). El problema de síntesis  $\mathcal{H}_2$  se subdivide en dos problemas:

**Problema 3.2.2.** Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k)$  que estabilice el sistema (3.2.1) y minimice

$$\left[ \max_{\nu} \|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_2^2 \right]$$

Debido a la complejidad matemática que representa la solución del problema 3.2.2, se plantea una aproximación subóptima como el siguiente problema:

**Problema 3.2.3.** Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k)$  que estabilice el sistema (3.2.1) y minimice el límite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  para toda realización del sistema dentro del dominio de incertidumbres, es decir:

$$\text{mín } \mu$$

*Sujeto a*

$$\|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_2^2 \leq \mu, \quad \forall \nu$$

Que también puede tratarse como un problema diferente, consistente en satisfacer una respuesta a priori, es decir:

*Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k)$  que estabilice el sistema de manera que:*

$$\|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_2^2 \leq \mu$$

#### ■ Incertidumbres politópicas

### Aproximación Cuadrática

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3). Una formulación al problema de la minimización de un límite superior de  $\|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_2^2 \forall \nu$  es:

$$\text{mín } \mu$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
 & \text{Traza } \mathbf{W} \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{P}\mathbf{A}'_i + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & i = 1, 2, \dots, n_a \\
 & \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.
 \end{aligned}$$

### Aproximación por $\mathcal{FLDP}$ s

Nuevamente  $\mathbf{A}(\nu)$  está expresada por (1.5.3). Una formulación al problema de la minimización de un límite superior de  $\|T_{\mathbf{z}_k\mathbf{w}_k}\|_2^2 \forall \nu$  es:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \mu \\
 & \text{Traza } [\mathbf{W}_i] \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i - (\mathbf{G} + \mathbf{G}') & \mathbf{C}_{12}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' & \mathbf{W}_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{array}{c} \text{Condición de Estabilidad} \\ \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_{12} \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & (\mathbf{G} + \mathbf{G}') - \mathbf{P}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \end{array} \end{array} \quad (3.2.4) \\
 & \forall i = 1, 2, \dots, N \\
 & \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{G} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1}.
 \end{aligned}$$

#### ■ Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2). El problema puede ser expresado como:

**Problema 3.2.4.** Encontrar un controlador  $\mathbf{K} : (\mathbf{u}_k = \mathbf{K}\mathbf{x}_k)$  tal que  $(\mathbf{A}_n + \mathbf{DVE} + \mathbf{B}_2\mathbf{K})$  sea asintóticamente estable y minimice el límite superior de  $\|T_{\mathbf{z}_k\mathbf{w}_k}\|_2^2, \mu$ , para cualquiera sea  $\mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma\mathbf{I}$ .

**Teorema 3.2.5.** *El controlador que minimiza el limite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (3.2.1) esta dada como la solución de*

$$\text{mín } \mu$$

*Sujeto a*

$$\begin{aligned} & \text{Traza } \mathbf{W} \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{P}\mathbf{C}'_1 + \mathbf{R}'\mathbf{D}'_{12} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{P}\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}'\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \forall \mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma\mathbf{I} \end{aligned}$$

*LMİ en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$ .*

### 3.2.2. Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (3.2.1).

**Problema 3.2.6.** *Encontrar una ley de control  $u_k(y)$  que estabilice el sistema y minimice un límite de  $\|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_2^2$ ,  $\forall \nu$*

#### ▪ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , la representación de estado para el controlador puede ser la definida en (2.2.26), y el conjunto sistema-controlador está definido como en (2.2.29)

**Teorema 3.2.7.** *La dinámica del controlador que minimiza el limite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (2.2.29) esta dada como la solución de*

$$\text{mín } \mu$$

*Sujeto a*

$$\text{Traza } [\mathbf{W}] \leq \mu$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A} & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , que corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que minimizan una cota superior de  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2$ .

### Caso con incertidumbres

**Problema 3.2.8.** Determinar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que estabilizan el sistema y minimizan  $\mu$ , de tal forma que  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_2^2 \leq \mu$ ,  $\forall \nu$ .

#### ■ Incertidumbres politópicas

#### Aproximación Cuadrática

Como en el caso de la realimentación de estados la matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), y el problema de síntesis  $\mathcal{H}_2$  consiste en:

$$\text{mín } \mu$$

Sujeto a

$$\text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A}_i & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA}_i + \mathbf{LC}_2 & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_i & (\mathbf{XA}_i + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

■ **Incertidumbres limitadas en norma**

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2). De manera que el problema de síntesis  $\mathcal{H}_2$  puede ser formulado como:

**Teorema 3.2.9.** *La dinámica del controlador que minimiza el limite superior de la norma  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mu$ , del sistema (2.2.29), con  $\mathbf{A}(\nu)$  definida como en (ref20), está dada como la solución de*

$$\text{mín } \mu$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} & \text{Traza} [\mathbf{W}] \leq \mu \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} & \mathbf{A}_n & \mathbf{D} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA}_n + \mathbf{LC}_2 & \mathbf{XD} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{YE}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_n & (\mathbf{XA}_n + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{E}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}'\mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{EY} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , que corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que minimizan  $\|T_{zw}\|_2^2$ .

# Capítulo 4

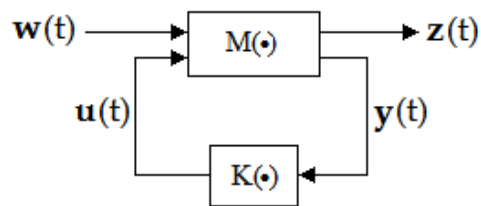
## Síntesis $\mathcal{H}_\infty$

En este capítulo se trabaja el problema de síntesis de controladores que estabilicen un sistema y minimicen la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada externa,  $\mathbf{w}$ , a la salida controlada,  $\mathbf{z}$ .

### 4.1. Introducción

### 4.2. Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ en Tiempo Continuo

Sea el sistema



Con representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

**Problema 4.2.1.** *El problema  $\mathcal{H}_\infty$  consiste en sintetizar una ley de control  $\mathbf{u}(t)$  que estabilice el sistema (4.2.1) y garantice una cota superior para la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de  $\mathbf{w}$  a  $\mathbf{z}$ , es decir*

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 < \lambda \quad \forall \quad \nu$$

### 4.2.1. Realimentación de Estado

Con una ley de control  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ . La función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}$  a la salida medible,  $\mathbf{z}$ , del sistema (4.2.1) es

$$T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}(s) = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})(s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\nu) - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1 \quad (4.2.2)$$

#### ▪ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , por lo que haciendo similitudes de la función de transferencia en (1.4.4) con la función de transferencia en (4.2.2), utilizando el cálculo de la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la sección 1.4, se tiene

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 < \lambda \quad \forall \quad \nu$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0} \text{ tales que} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$$\mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.$$

#### Caso con incertidumbres

#### ▪ Incertidumbres politópicas

#### Aproximación Cuadrática

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3). El problema consiste en determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}$  a la salida medible,  $\mathbf{z}$ , de manera que estabilice el sistema de lazo cerrado y, además, que:

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 < \lambda \quad \forall \quad \mathbf{A}(\nu)$$

Si y sólo si

$$\begin{aligned} & \exists \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0} \text{ tales que} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & (\mathbf{C}_1 \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R} & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \forall i = 1, 2, \dots, N \\ & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

### Aproximación por $\mathcal{FLDP}$ s

Nuevamente  $\mathbf{A}(\nu)$  está expresada por (1.5.3). El problema consiste en determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}$  a la salida medible,  $\mathbf{z}$ , de manera que establezca el sistema de lazo cerrado y, además, que:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{Condición de Estabilidad} \\ \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{G}' \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i \\ \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{array}} \end{array} \begin{array}{c} (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' \\ \mathbf{0} \\ -\lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{B}_{1\infty} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{array} < \mathbf{0} \\ & \begin{array}{c} \mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \forall i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{G}^{-1}$ .

### ■ Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.2). El problema consiste en determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}$  a la salida medible,  $\mathbf{z}$ , de manera que establezca el sistema de lazo cerrado y, además, que:

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 &= \|(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{K})(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_n - \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{E} - \mathbf{B}_2 \mathbf{K})^{-1} \mathbf{B}_1\|_\infty^2 < \lambda \\ & \text{(y estable)} \quad \forall \mathbf{V} : \mathbf{V}' \mathbf{V} \leq \gamma \mathbf{I} \end{aligned}$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0} \text{ tales que}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & (\mathbf{C}_1 \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{B}_1 & \mathbf{P} \mathbf{E}' & \mathbf{D}' \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R} & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

$$\forall \mathbf{V} : \mathbf{V}' \mathbf{V} \leq \gamma \mathbf{I}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}$ .

### 4.2.2. Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (4.2.1).

**Problema 4.2.2.** *Encontrar una ley de control  $u(y)$  que estabilice el sistema y garantice una cota superior para la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada externa,  $\mathbf{w}$ , a la salida controlada,  $\mathbf{z}$ .*

#### ■ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ . Utilizando la misma representación de estado para el controlador que en (2.1.4) y la representación de estado sistema-controlador definida en (2.1.14), se puede formular el problema de síntesis  $\mathcal{H}_\infty$  como

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 < \lambda \quad (\text{y estable})$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{L} \text{ y } \tilde{\mathbf{M}} \text{ tales que}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}' + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}' \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L} & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21})' & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{C}'_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , cuyas definiciones son iguales a las del teorema 2.1.4, y corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  y  $\tilde{P}$  que garantizan que  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2$  tenga como cota inferior a  $\lambda$ .

## Caso con incertidumbres

### ■ Incertidumbres politópicas

#### Aproximación Cuadrática

Como en el caso de la realimentación de estado la matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), y el problema de síntesis  $\mathcal{H}_\infty$  consiste en:

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 < \lambda \quad (\text{y estable})$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{L} \text{ y } \tilde{\mathbf{M}} \text{ tales que}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{M} + \mathbf{Z}_i & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R} \\ \mathbf{M}' + \mathbf{Z}'_i & \mathbf{A}'_i\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_i + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}'_2\mathbf{L} & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21})' & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' & \mathbf{C}'_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Que es una BMI, debido a la presencia de los términos  $\mathbf{Z}_i$ , cuya resolución se puede llevar a cabo por medio de PNL, sin embargo, la convergencia del problema no puede ser garantizada.

### ■ Incertidumbres limitadas en norma

Como en el caso de la realimentación de estados  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2). De manera que la ecuación de estados de (3.1.1) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A}_n + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{E})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c(t)$$

La representación de estado del controlador sigue siendo (2.1.4), teniendo una nueva representación de estado para la dinámica del sistema como

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} \mathbf{V} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix} + \mathcal{B}\mathbf{w}(t) \quad (4.2.5)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathcal{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix}$$

Si siguiendo procedimientos similares a los seguidos en los casos de realimentación de salida anteriores se puede llegar a la formulación final del problema como

$$\|T_{zw}\|_\infty^2 < \lambda \quad (\text{y estable})$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{L} \text{ y } \tilde{\mathbf{M}} \text{ tales que}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'_n \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_n + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L} & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{X} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21})' & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Y} \mathbf{E}' \\ (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{C}'_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}' \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{Y} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , que corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que garantizan a  $\lambda$  como límite superior de  $\|T_{zw}\|_\infty^2$ .

### 4.3. Síntesis $\mathcal{H}_\infty$ en Tiempo Discreto

En la sección 1.4 se muestra cómo determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de un sistema de tiempo discreto, sin embargo, es posible utilizar el *lema del límite real* que nos permite utilizar expresiones un poco más amigables a la hora de hallar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de un sistema de control de tiempo discreto.

**Lema 4.3.1.** *Considerar una función de transferencia discreta*

$$T(z) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

Las siguientes expresiones son equivalentes:

1.  $\|\mathbf{D} + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\|_\infty < \lambda$  y  $\mathbf{A}$  es estable en tiempo discreto.
2. Existe una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{P}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} & \mathbf{A}'\mathbf{P}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}'_1 \\ \mathbf{B}'_1\mathbf{P}\mathbf{A} & \mathbf{B}'_1\mathbf{P}\mathbf{B}_1 - \lambda\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{11} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Existe una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{AS} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{SA}' & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{SC}' \\ \mathbf{B}' & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{CS} & \mathbf{D} & \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

De forma dual también se tendría

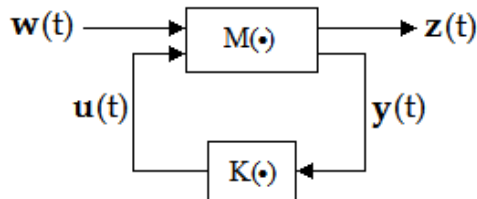
Existe una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{P}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AQA}' - \mathbf{Q} & \mathbf{B}'_1\mathbf{QA} & \mathbf{C}'_1 \\ \mathbf{A}'_1\mathbf{QB}_1 & \mathbf{B}_1\mathbf{QB}'_1 - \gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}'_{11} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

Existe una matriz simétrica definida positiva  $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^{-1}$  tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{SA} & \mathbf{SB} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'\mathbf{S} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{B}'\mathbf{S} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{D}' & \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Sea el sistema



Con representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{z}[k] &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k] \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

**Problema 4.3.2.** El problema  $\mathcal{H}_\infty$  consiste en sintetizar una ley de control  $\mathbf{u}[k]$  que estabilice el sistema (4.3.1) y garantice una cota superior para la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de  $\mathbf{w}_k$  a  $\mathbf{z}_k$ , es decir

$$\|T_{\mathbf{z}_k\mathbf{w}_k}\|_\infty^2 < \lambda \quad \forall \nu$$

### 4.3.1. Realimentación de Estado

Con una ley de control  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}\mathbf{x}[k]$ . La función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}_k$  a la salida medible,  $\mathbf{z}_k$ , del sistema (4.3.1) es

$$T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}(z) = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})(z\mathbf{I} - \mathbf{A}(\nu) - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1$$

#### ■ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , por lo que utilizando el resultado del lema 4.3.1 y la función de transferencia en (4.3.1), se tiene

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_{\infty}^2 < \lambda \quad \forall \quad \nu$$

Si y sólo si

$$\begin{aligned} & \exists \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0} \text{ tales que} \\ & \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{P} & (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}) & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{B}_1' & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0} \\ & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

#### Caso con incertidumbres

#### ■ Incertidumbres politópicas

#### Aproximación Cuadrática

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3). El problema consiste en determinar la norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  de la función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}_k$  a la salida medible,  $\mathbf{z}_k$ , de manera que estabilice el sistema de lazo cerrado y, además, que:

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_{\infty}^2 < \lambda \quad \forall \quad \mathbf{A}$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{R} \text{ y } \mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0} \text{ tales que}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}) & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}$ .

### Aproximación por $\mathcal{FLDP}$ s

Nuevamente  $\mathbf{A}(\nu)$  está expresada por (1.5.3). El problema consiste en determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}_k$  a la salida medible,  $\mathbf{z}_k$ , de manera que establezca el sistema de lazo cerrado y, además, que:

$$\begin{bmatrix} \text{Condición de Estabilidad} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & (\mathbf{G} + \mathbf{G}') - \mathbf{P}_i \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{1\infty} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ \forall i = 1, 2, \dots, N \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mu$ ,  $\mathbf{W}_i$ ,  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1}$ .

### ■ Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.2). El problema consiste en determinar la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada  $\mathbf{w}$  a la salida medible,  $\mathbf{z}$ , de manera que establezca el sistema de lazo cerrado y, además, que:

$$\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2 = \|(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K})(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{E} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1\|_\infty^2 < \lambda$$

(y estable)  $\forall \mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \mathbf{I}$

Si y sólo si

$\exists \mathbf{R}$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0}$  tales que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}_n\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}) & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{P}\mathbf{E}' & \mathbf{D}' \\ (\mathbf{A}_n\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_1 & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.3.3)$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{RP}^{-1}$ .

### 4.3.2. Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (4.3.1).

**Problema 4.3.3.** *Encontrar una ley de control  $u(y)$  que estabilice el sistema y garantice una cota superior para la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada externa,  $\mathbf{w}_k$ , a la salida controlada,  $\mathbf{z}_k$ .*

#### ■ Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , utilizando la misma representación de estado para el controlador que en (2.1.13), se obtiene la representación de estado de la dinámica del sistema con realimentación de salida dada por (2.2.29), el problema de síntesis  $\mathcal{H}_\infty$  se puede formular como

$$\|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_\infty^2 < \lambda \quad (\text{y estable})$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{L} \text{ y } \tilde{\mathbf{M}} \text{ tales que}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21}) & \mathbf{0} \\ (\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_1 \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , cuyas definiciones son iguales a las del teorema 2.1.8, y corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  y  $\tilde{P}\tilde{m}$  que garantizan que  $\|T_{\mathbf{z}\mathbf{w}}\|_\infty^2$  tenga como cota inferior a  $\lambda$ .

#### Caso con incertidumbres

##### ■ Incertidumbres politópicas

### Aproximación Cuadrática

Como en el caso de la realimentación de estado la matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), y el problema de síntesis  $\mathcal{H}_\infty$  consiste en:

$$\|T_{\mathbf{z}_k \mathbf{w}_k}\|_\infty^2 < \lambda \quad (\text{y estable})$$

Si y sólo si

$$\exists \mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{L} \text{ y } \tilde{\mathbf{M}} \text{ tales que}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_i \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} & \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{X} \mathbf{A}_i + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_i \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' \\ \mathbf{A}_i' & (\mathbf{X} \mathbf{A}_i + \mathbf{L} \mathbf{C}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1' \\ \mathbf{B}_1' & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Que es una BMI, debido a la presencia de los términos  $\mathbf{Z}_i$ , cuya resolución se puede llevar a cabo por medio de PNL, sin embargo, la convergencia del problema no puede ser garantizada.

#### ■ Incertidumbres limitadas en norma

Como en el caso de la realimentación de estados  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2). De manera que la ecuación de estados de (3.1.1) se puede escribir como

$$\mathbf{x}[k+1] = (\mathbf{A}_n + \mathbf{D} \mathbf{V} \mathbf{E}) \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}[k] + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c[k]$$

La representación de estado del controlador sigue siendo (2.1.13), teniendo una nueva representación de estado para la dinámica del sistema como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}[k+1] \\ \mathbf{x}_c[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}^{\mathcal{D}} \mathbf{V} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix} + \mathbf{B} \mathbf{w}[k] \quad (4.3.4)$$

$$\mathbf{z}[k] = \mathcal{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] \\ \mathbf{x}_c[k] \end{bmatrix}$$



Siguiendo procedimientos similares a los seguidos en los casos de realimentación de salida anteriores se puede llegar a la formulación final del problema como

$$\|T_{z_k w_k}\|_{\infty}^2 < \lambda \quad (\text{y estable})$$

Si y sólo si

$\exists \mathbf{X} = \mathbf{X}' > \mathbf{0}, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' > \mathbf{0}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  tales que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{X} \mathbf{A}_n + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} & \mathbf{X} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_n & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{0} & \mathbf{Y} \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{X} \mathbf{A}_n + \mathbf{L} \mathbf{C}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_1 & \mathbf{0} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{0} & (\mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{E} \mathbf{Y} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , que corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que garantizan a  $\lambda$  como límite superior de  $\|T_{z_w}\|_{\infty}^2$ .

# Capítulo 5

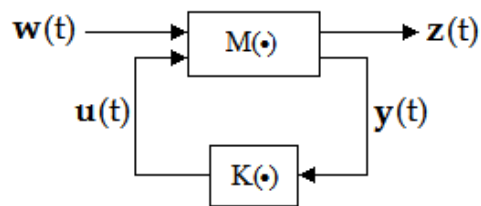
## Síntesis Multicriterio

En este capítulo se trabaja el problema de síntesis de controladores que estabilicen un sistema y minimicen las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  de la función de transferencia de la entrada externa,  $\mathbf{w}$ , a la salida controlada,  $\mathbf{z}$ .

### 5.1. Introducción

### 5.2. Síntesis Multicriterio en Tiempo Continuo

Sea el sistema



Con representación de estado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{12}\mathbf{w}_2(t) + \mathbf{B}_{1\infty}\mathbf{w}_\infty(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{w}_2(t) + \mathbf{D}_{2\infty}\mathbf{w}_\infty(t) \\ \mathbf{z}_2(t) &= \mathbf{C}_{12}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{122}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}_\infty(t) &= \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

**Problema 5.2.1.** *El problema multicriterio consiste en sintetizar una ley de control  $\mathbf{u}(t)$  que estabilice el sistema (5.2.1) y garantice que*

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{z}_2 \mathbf{w}_2}\|_2^2 &\leq \mu \quad y \\ \|T_{\mathbf{z}_\infty \mathbf{w}_\infty}\|_\infty^2 &< \lambda \end{aligned}$$

### 5.2.1. Realimentación de Estado

Con una ley de control  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  y tomando los resultados de las secciones 3.2.1 y 4.2.1, se tiene:

- **Caso sin incertidumbres**

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$  y el problema de síntesis multicriterio se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \text{Traza}[W] &\leq \mu \\ \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B}'_{12} \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{P} \end{bmatrix} &\geq \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R}) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} &\leq \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R})' & \mathbf{B}_{1\infty} \\ \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} &< \mathbf{0} \\ &\mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

- **Caso con incertidumbres**

**Incertidumbres politópicas**

### Aproximación Cuadrática

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3). La formulación del problema es:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } \mu \\ \text{Traza } [W] \leq \mu \\ \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{B}'_{12} \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ \left[ \begin{array}{cc} \text{Condición de Estabilidad} & (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' \\ \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R}) \end{array} \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \end{array} \right\} & (5.2.2) \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_\infty \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Condición de Estabilidad} \\ \left[ \begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 \\ \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} \end{array} \end{array} \right] & \begin{array}{c} (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R})' \\ -\lambda\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{B}_{1\infty} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{array} \end{array} \right\} < \mathbf{0} \\
 & \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N \\
 & \quad \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.
 \end{aligned}$$

### Aproximación por $\mathcal{FLDP}$ s

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3). La formulación del problema es:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } \mu \\ \text{Traza } [\mathbf{W}_i] \leq \mu \\ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & \mathbf{C}_{12}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{G} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' & -(\mathbf{G} + \mathbf{G}') + \mathbf{P}_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ \left[ \begin{array}{cc} \text{Condición de Estabilidad} & \\ \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{G}'\mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 \quad \epsilon(\mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i \\ \epsilon(\mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i \quad -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{array} \end{array} \right] & \begin{array}{c} \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{array} \end{array} \right\} \leq \mathbf{0} \end{array} \right\} & \\
 & \quad \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0} \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{Norma } \mathcal{H}_\infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Condición de Estabilidad} \\ \left[ \begin{array}{ccc|cc} \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{G}' \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i & (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \mathbf{B}_{1\infty} \\ \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R} & \mathbf{0} & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \\ \forall i = 1, 2, \dots, N \\ \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{G} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1}. \end{array} \right. \quad (5.2.3)$$

### Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2).

$$\text{Norma } \mathcal{H}_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } \mu \\ \text{Traza } [\mathbf{W}] \leq \mu \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{W} & \mathbf{C}_{12} \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R} \\ \hline (\mathbf{C}_{12} \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{R})' & \mathbf{P} \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ \text{Condición de Estabilidad} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_n \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} \mathbf{E}' & \mathbf{D} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{E} \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}'_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right] \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \\ \\ \text{Norma } \mathcal{H}_\infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Condición de Estabilidad} \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_n \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \mathbf{B}_{1\infty} & \mathbf{P} \mathbf{E}' & \mathbf{D}' \\ \hline \mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R} & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \\ \forall \mathbf{V} : \mathbf{V}' \mathbf{V} \leq \gamma \mathbf{I} \\ \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}. \end{array} \right. \quad (5.2.4)$$

### 5.2.2. Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (5.2.1) y utilizando los resultados encontrados en las secciones 3.2.2 y 4.2.2, se tiene:

▪ **Caso sin incertidumbres**

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$  y se utiliza la misma representación de estado para el controlador que en (2.1.4). La formulación para el problema 5.2.1 se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212} \\ \mathbf{B}'_{12} & (\mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{YA}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & (\mathbf{C}_{12}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2\mathbf{L} & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_{12} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{YA}' + \mathbf{B}_2\mathbf{R} + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{B}_{1\infty} & \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R} \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}'\mathbf{X} + \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2\mathbf{L} & \mathbf{XB}_{1\infty} + \mathbf{LD}_{21\infty} & \mathbf{C}_{1\infty} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & (\mathbf{XB}_{1\infty} + \mathbf{LD}_{21\infty})' & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R})' & \mathbf{C}'_{1\infty} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , cuyas definiciones son iguales a las del teorema 2.1.8, y corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que minimizan  $\|T_{zw}\|_2^2$ .

**Caso con incertidumbres**

Aquí la matriz dinámica se considera incierta.

✓ Incertidumbres politópicas (Aproximación cuadrática)

Como en el caso de la realimentación de estados la matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3), y el problema de síntesis multicriterio consiste en:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_2 \left\{ \begin{array}{l} \min \mu \\ \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}'_{12} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & (\mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212})' \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ \text{Condición de Estabilidad} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{Y} + \mathbf{YA}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \mathbf{M} + \mathbf{Z}_i & (\mathbf{C}_{12} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122} \mathbf{R})' \\ (\mathbf{M} + \mathbf{Z}_i)' & \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{XA}'_i + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L}' & \mathbf{C}'_{12} \\ \mathbf{C}_{12} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122} \mathbf{R} & \mathbf{C}_{12} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \\ \\ \text{Norma } \mathcal{H}_\infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Condición de Estabilidad} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{Y} + \mathbf{YA}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \mathbf{M} + \mathbf{Z}_i & \mathbf{B}_{1\infty} & (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' \\ (\mathbf{M} + \mathbf{Z}_i)' & \mathbf{A}_i \mathbf{X} + \mathbf{XA}'_i + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L}' & \mathbf{XB}_{1\infty} + \mathbf{LD}_{21\infty} & \mathbf{C}_{1\infty} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & (\mathbf{XB}_{1\infty} + \mathbf{LD}_{21\infty})' & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \mathbf{C}_{1\infty} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{array} \right. \\ \\ \forall \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (5.2.5)
 \end{aligned}$$

Que es una BMI, debido a la presencia de los términos  $\mathbf{Z}_i$ , cuya resolución se puede llevar a cabo por medio de programación no lineal (PNL), sin embargo, la convergencia del problema no puede ser garantizada.

✓ Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.2).

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_2 \left\{ \begin{array}{l} \min \mu \\ \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}'_{12} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & (\mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212})' \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ \text{Condición de Estabilidad} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{YA}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & (\mathbf{C}_{12} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122} \mathbf{R})' & \mathbf{D} & \mathbf{Y}' \mathbf{E}' \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}_n \mathbf{X} + \mathbf{XA}'_n + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L}' & \mathbf{C}'_{12} & \mathbf{XD} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{C}_{12} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122} \mathbf{R} & \mathbf{C}_{12} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}' \mathbf{X} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{EY} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{array} \right. \\ \\ \text{Norma } \mathcal{H}_\infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Condición de Estabilidad} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \mathbf{Y} + \mathbf{YA}'_n + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{B}_{1\infty} & (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \mathbf{D} & \mathbf{Y}' \mathbf{E}' \\ \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{A}_n \mathbf{X} + \mathbf{XA}'_n + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{C}'_2 \mathbf{L}' & \mathbf{XB}_{1\infty} + \mathbf{LD}_{21\infty} & \mathbf{C}_{1\infty} & \mathbf{XD} & \mathbf{E}' \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & (\mathbf{XB}_{1\infty} + \mathbf{LD}_{21\infty})' & -\lambda \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \mathbf{C}_{1\infty} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}' & \mathbf{D}' \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{EY} & \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{array} \right. \\ \\ \end{array} \right. \quad (5.2.6)
 \end{aligned}$$

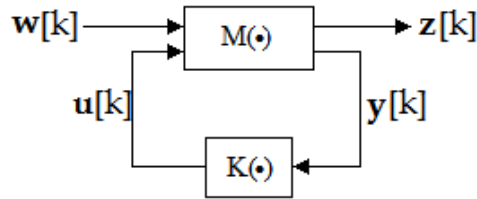
$$\forall \mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma\mathbf{I}$$

$$\mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L} \text{ y } \tilde{\mathbf{M}}.$$

Para las tres formulaciones anteriores, encontrar las matrices  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$  y el escalar  $\mu$  que satisfacen (5.2.5) o (5.2.6), equivale a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$ , que definen la dinámica del controlador, y la matriz de Lyapunov que prueba la estabilidad del sistema.

### 5.3. Síntesis $\mathcal{H}_2$ en Tiempo Discreto

Sea el sistema



Con representación de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}(\nu)\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_1\mathbf{w}[k] + \mathbf{B}_2\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{z}_2[k] &= \mathbf{C}_{12}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{122}\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{z}_\infty[k] &= \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{u}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}[k] \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

El problema multicriterio, nuevamente, consiste en sintetizar una ley de control  $\mathbf{u}$  que estabilice el sistema (5.3.1) y garantice un límite superior para la norma  $\mathcal{H}_2$  y la norma  $\mathcal{H}_\infty$  de dos funciones de transferencia, es decir

$$\begin{aligned} \text{mín } & \|T_{\mathbf{z}_2 \mathbf{w}_k}(z)\|_2^2 \text{ y} \\ & \|T_{\mathbf{z}_\infty \mathbf{w}_k}(z)\|_\infty^2 < \lambda \end{aligned}$$

La utilización de una sola función de Lyapunov para garantizar tanto la estabilidad como el desempeño del sistema, conducen a condiciones suficientes de solución.

#### 5.3.1. Realimentación de Estado

Con una ley de control  $\mathbf{u}[k] = \mathbf{K}\mathbf{x}[k]$  y utilizando los resultados de 3.3.1 y 4.3.1, se tiene:



▪ **Caso sin incertidumbres**

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , una formulación al problema mixto sería

$$\begin{aligned}
 & \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' \\ \mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{P}\mathbf{A}' + \mathbf{R}'\mathbf{B}_2' & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R}) & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R})' \\ \mathbf{B}_1' & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R}) & \mathbf{0} & -\lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\
 & \mathcal{LMI} \text{ en } \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.
 \end{aligned}$$

**Caso con incertidumbres**

El sistema que es de la misma forma al descrito por (5.3.1).

✓ **Incertidumbres politópicas**

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  ser expresada por (1.5.3).

**Aproximación Cuadrática**

Una formulación al problema mixto es:

$$\begin{aligned}
 & \text{mín } \mu \\
 & \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} \\ (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_{12} \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{12}' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \text{Condicón de Estabilidad}
 \end{aligned}$$

Norma  $\mathcal{H}_2$  {

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} \text{Condición de Estabilidad} & & & \\ \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{P} & \mathbf{A}_i \mathbf{P} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} \\ (\mathbf{A}_i \mathbf{P} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' & \mathbf{P} \end{array}} & \mathbf{B}_{1\infty} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0} \right. \\
& \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N \\
& \quad \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Aproximación por  $\mathcal{FLDPs}$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[ \begin{array}{c} \text{mín } \mu \\ \text{Traza } [\mathbf{W}_i] \leq \mu \\ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{P}_i - (\mathbf{G} + \mathbf{G}') & \mathbf{C}_{12} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{122} \mathbf{R} \\ (\mathbf{C}_{12} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{122} \mathbf{R})' & \mathbf{W}_i \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ \text{Condición de Estabilidad} \\ \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} \\ (\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' & (\mathbf{G} + \mathbf{G}') - \mathbf{P}_i \end{array}} & \mathbf{B}_{12} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \right. \\
& \left. \left[ \begin{array}{cccc} \text{Condición de Estabilidad} & & & \\ \boxed{\begin{array}{cc} \mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} \\ (\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R})' & (\mathbf{G} + \mathbf{G}') - \mathbf{P}_i \end{array}} & \mathbf{B}_{1\infty} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R})' & \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1\infty} \mathbf{G} + \mathbf{D}_{12\infty} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \lambda \mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0} \right. \\
& \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N \\
& \quad \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{G} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

### ✓ Incertidumbres limitadas en norma

En este caso  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.3.5).

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_2 \\ \text{Condición de Estabilidad} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mín } \mu \\ \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{W} & (\mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' \\ \mathbf{C}_{12}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} & \mathbf{P} \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ \left[ \begin{array}{cc|ccc} \mathbf{P} & \mathbf{A}_n\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{P}\mathbf{E}' & \mathbf{D}' \\ \hline (\mathbf{A}_n\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \end{array} \\
 & \left. \begin{array}{l} \text{Norma } \mathcal{H}_\infty \\ \text{Condición de Estabilidad} \end{array} \right\} \left[ \begin{array}{cc|ccc} \mathbf{P} & \mathbf{A}_n\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{B}_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{P}\mathbf{E}' & \mathbf{D}' \\ \hline (\mathbf{A}_n\mathbf{P} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \mathbf{P} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{P} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] > \mathbf{0} \\
 & \quad \forall \mathbf{V} : \mathbf{V}'\mathbf{V} \leq \gamma\mathbf{I} \\
 & \quad \mathcal{LMI} \text{ en } \mu, \mathbf{W}, \mathbf{P} \text{ y } \mathbf{R}, \text{ con } \mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{P}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

### 5.3.2. Realimentación de Salida

El sistema está definido nuevamente por (5.3.1).

#### Caso sin incertidumbres

Para este caso  $\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}$ , la representación de estado del controlador está definida en (2.1.13), por lo que la formulación al problema mixto puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A} & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R})' \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 & \mathbf{C}'_1 \\ (\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' & (\mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R})' \\ \mathbf{B}'_1 & (\mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21})' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}'_{1\infty} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{1\infty}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12\infty}\mathbf{R}) & \mathbf{C}_{1\infty} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Que tiene solución por LMI con respecto a  $\mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{R}, \mathbf{L}$  y  $\tilde{\mathbf{M}}$ , que corresponde a encontrar las matrices  $\{\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c\}$  que minimizan  $\|T_{z_2w}\|_2^2$  y garantizan la cota superior para  $\|T_{z_\infty w}\|_\infty^2$ .

### Caso con incertidumbres

El sistema está definido nuevamente por (5.3.1).

#### ✓ Incertidumbres politópicas (Aproximación Cuadrática)

Como en el caso de la realimentación de estados la matriz  $\mathbf{A}(\nu)$  está definida como en (1.5.3). El problema mixto consiste en:

$$\begin{aligned}
& \text{mín } \mu \\
& \text{Traza}[\mathbf{W}] \leq \mu \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}'_{12} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & (\mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212})' \\ \mathbf{B}_{12} & \mathbf{XB}_{12} + \mathbf{LD}_{212} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \text{Condición de Estabilidad} \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} & \mathbf{A}_i & (\mathbf{C}_{12}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R})' \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{XA}_i + \mathbf{LC}_2 & \mathbf{C}'_{12} \\ (\mathbf{A}_i\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{R})' & \tilde{\mathbf{M}}' & \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}'_i & (\mathbf{XA}_i + \mathbf{LC}_2)' & \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{12}\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{122}\mathbf{R} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$



# Capítulo 6

## Aplicación Numérica

En este capítulo se trabajan un par de sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, con el fin de efectuar sobre ellos análisis de estabilidad, síntesis  $\mathcal{H}_2$  y síntesis multicriterio, tanto por realimentación de estado como por realimentación de salida, para incertidumbres definidas de forma politópica, utilizando la aproximación cuadrática y la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s.

### 6.1. Sistema en Tiempo Continuo

La figura 6.1.1 muestra un péndulo invertido montado sobre un pequeño carro que se mueve horizontalmente debido a una fuerza externa  $u(t)$ . El péndulo invertido está constituido por una barra con masa uniformemente distribuida. Asumiendo que el coeficiente de fricción entre el aire y el carro,  $f_c$ , y entre el carro y la barra,  $f_b$ , no son exactamente conocidos, pero tienen un valor medio de 0.2, siguiendo el modelo utilizado en [5], se puede escribir (1.2.1) como

$$\mathbf{A}(\nu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,8889 & 4/3 \\ 0 & 5/2 & 4/3 & 8 \end{bmatrix} + f_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{bmatrix} + f_c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con  $|f_b| < \rho$  y  $|f_c| < \rho$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{212} = \mathbf{D}_{21\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{122} = \mathbf{D}_{12\infty} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8889 \\ 4/3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{1\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi/6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{1\infty} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.1)$$

Se busca: determinar el máximo valor de  $\rho$  para que el sistema (6.1.1) sea estable, determinar el comportamiento de la cota superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  de sistema en función de la variación del parámetro incierto,  $\rho$ , y analizar el comportamiento de las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  del sistema en las síntesis multicriterio para un valor del parámetro incierto determinado. Hacer una comparación de los resultados anteriores para una definición politópica de la incertidumbre desde las aproximaciones cuadrada y por  $\mathcal{FLDP}$ s.

### 6.1.1. Estabilidad (Realimentación de Estado)

#### Aproximación cuadrática

Tomando la condición de estabilidad de (5.2.2), se tiene que el sistema será estable si, y solamente si

Existen  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tales que

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i' + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}_2' < \mathbf{0}$$

$$\forall \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}$ .

El valor máximo para el cual el sistema es estable es  $\rho = 0,089$ , la matriz de realimentación de estados para el controlador es

$$\mathbf{K} = 1 * 10^7 \begin{bmatrix} 2,7863 & 5,2006 & 1,9034 & -1,2706 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar son valores demasiado grandes, sin embargo, el valor máximo de incertidumbre que se toma en [5] es  $\rho = 0,05$ , para el cual la matriz de realimentación de estados para el controlador es

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 187,3337 & 260,5271 & 123,4308 & -108,1674 \end{bmatrix}$$

Que maneja magnitudes mucho menores que para el caso de la incertidumbre máxima y son mucho más fáciles de manejar a la hora de una implementación.

### Aproximación por $\mathcal{FLDP}$ s

Tomando la condición de estabilidad de (5.2.3), se tiene que el sistema será estable si, y solamente si

Existen  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $0 < \epsilon$  (escalar), tales que

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_i > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{G}' \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \epsilon(\mathbf{A}_i \mathbf{G} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R}) - \mathbf{G}' + \mathbf{P}_i \\ \epsilon(\mathbf{G}' \mathbf{A}'_i + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2) - \mathbf{G} + \mathbf{P}_i & -\epsilon(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \forall \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$ , haciendo una búsqueda unidireccional para  $\epsilon$ .

La búsqueda unidireccional sobre  $\epsilon$  se realiza, primero, hallando el límite superior de dicho valor para que el problema sea factible, luego, definiendo un vector de valores para  $\epsilon$  desde 0.001 en incrementos de 0.001 hasta el valor superior hallado inicialmente y, finalmente, resolviendo el problema para cada valor de  $\epsilon$  y encontrando el valor de  $\epsilon$  que genera el mínimo valor del parámetro de factibilidad, que es el valor óptimo. Este procedimiento se sigue en todos los problemas posteriores que utilizan dicha búsqueda unidireccional, sólo que se busca el valor de  $\epsilon$  que genera el mínimo valor de la norma  $\mathcal{H}_2$ .

Para  $\rho = 0,089$ , valor máximo del parámetro incierto por la aproximación cuadrática,  $\epsilon = 0,3641$ . Para dichos valores la matriz de realimentación de estados es

$$\mathbf{K} = 1 * 10^4 \begin{bmatrix} 3,8675 & 6,9524 & 2,6873 & -1,8519 \end{bmatrix}$$



Cuadro 6.1: Comparación de resultados para el problema de síntesis  $\mathcal{H}_2$ 

$\rho$	$\mathcal{H}_2$ cuadratica	$\mathcal{H}_2$ FLDP	$\epsilon$
0.01	$1,7762 * 10^4$	$1,6422 * 10^4$	0.054
0.02	$2,4519 * 10^4$	$2,1321 * 10^4$	0.081
0.03	$3,6129 * 10^4$	$2,9516 * 10^4$	0.089
0.04	$5,8816 * 10^4$	$4,4474 * 10^4$	0.097
0.05	$1,1131 * 10^5$	$7,5487 * 10^4$	0.084
0.06	$2,7209 * 10^5$	$1,5414 * 10^5$	0.085
0.07	$1,0717 * 10^6$	$4,2701 * 10^5$	0.069
0.08	$1,6056 * 10^7$	$2,4047 * 10^6$	0.062

Para  $\rho = 0,05$ , valor que se considera como máxima incertidumbre en [5], con  $\epsilon = 0,61$  se obtiene que la matriz de realimentación de estados es

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 24,5454 & 26,0730 & 15,8171 & -21,2603 \end{bmatrix}$$

Se puede apreciar que los resultados anteriores, para las magnitudes de  $\mathbf{K}$  son mucho menores que los valores obtenidos por la aproximación cuadrática. Además, el valor máximo del parámetro incierto por esta aproximación aumenta a  $\rho = 0,0939$  con  $\epsilon = 0,0761$ . Para dichos valores la matriz de realimentación de estados es

$$\mathbf{K} = 1 * 10^4 \begin{bmatrix} 4,8856 & 9,2127 & 3,3954 & -2,2740 \end{bmatrix}$$

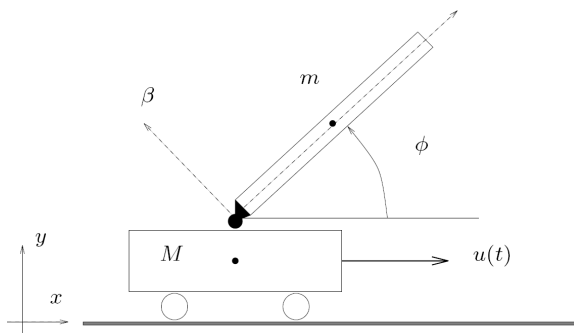
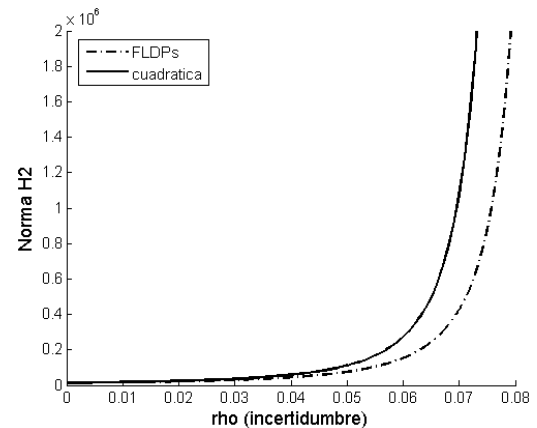
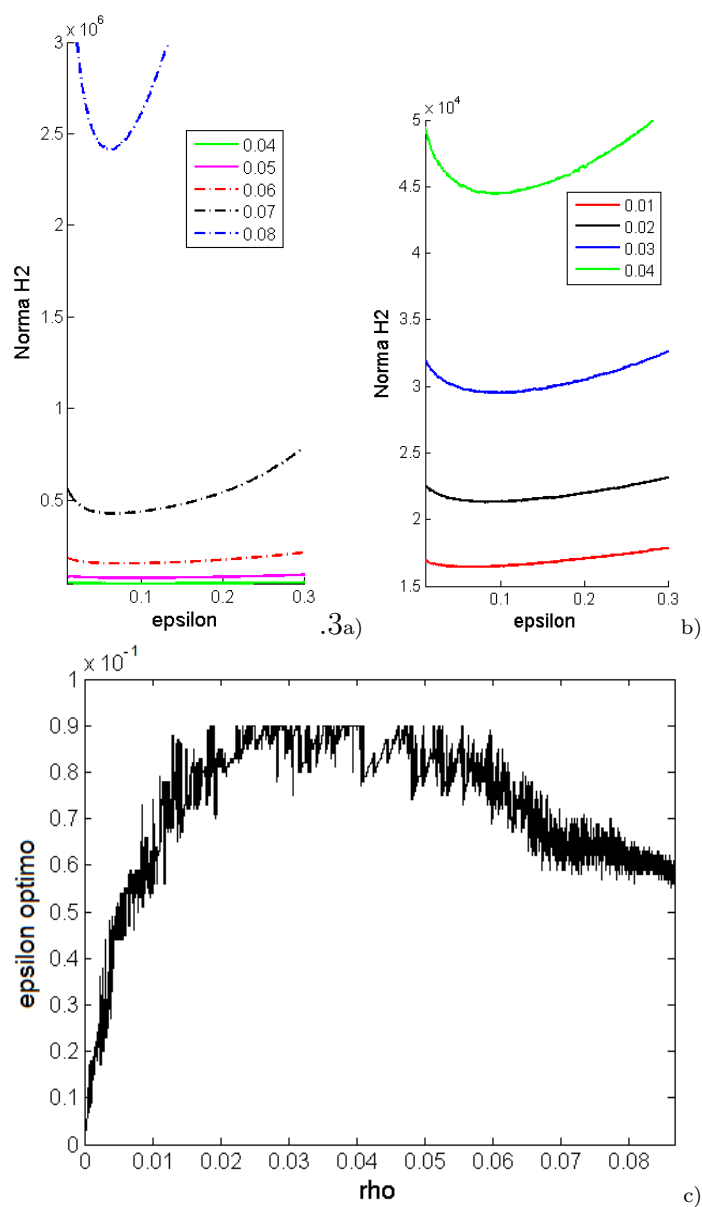


Figura 6.1.1.1 Péndulo invertido

Figura 6.1.1.2 Comportamiento de la norma  $\mathcal{H}_2$  para variaciones del parámetro incierto



**Figura 6.1.1.3** Comportamiento de  $\epsilon$ : a) Comportamiento de la norma  $\mathcal{H}_2$  vs.  $\epsilon$  para valores fijos del parámetro incierto, 0.08, 0.07, 0.06, 0.05 y 0.04 b) Comportamiento de la norma  $\mathcal{H}_2$  vs.  $\epsilon$  para valores fijos del parámetro incierto, 0.01, 0.02, 0.03, y 0.04, c) Valor óptimo de  $\epsilon$  para variaciones del parámetro incierto,  $\rho$ .

### 6.1.2. Síntesis $\mathcal{H}_2$ (Realimentación de Estado)

Para la aproximación cuadrática se toma la formulación para la norma  $\mathcal{H}_2$  de (5.2.2) y para la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s se toma la formulación de (5.2.3). Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.1.1.2 y en la tabla I. De donde se puede observar que la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s es mejor que la aproximación cuadrática, ya que todos los valores de la cota superior de la norma  $\mathcal{H}_2$  son menores por este método. Para la obtención de los datos de la figura 6.1.1.2 se trabajó para un vector de incertidumbres,  $\rho$ , desde 0.00001 hasta 0.08671 en incrementos de 0.00001, para cada valor se halló el valor óptimo de  $\epsilon$ . La figura 6.1.1.3a) resultó del gráfico  $\epsilon$  vs  $\rho$ .

A partir de los datos de la tabla I se puede observar un comportamiento particular para  $\epsilon$ , por lo que se decidió trabajar en algunas gráficas que ilustren mejor dicho comportamiento, con respecto a la variación del parámetro incierto. Dichas gráficas se muestran en la figura 6.1.1.3 En las figuras a) y b) se puede apreciar que el comportamiento de la norma  $\mathcal{H}_2$  en función de  $\epsilon$  es parabólico, a medida que aumenta la incertidumbre, dicha parábola se hace más cerrada. En la figura c) se puede apreciar que el comportamiento de  $\epsilon$  para una incertidumbre prácticamente nula el valor de epsilon es muy pequeño, aumenta conforme va aumentando la incertidumbre, hasta llegar a un valor máximo y luego vuelve a disminuir a una tasa más lenta que la de ascenso y llega a un valor aproximadamente constante hasta que el problema se vuelve no factible.

### 6.1.3. Síntesis Multicriterio (Realimentación de Estado)

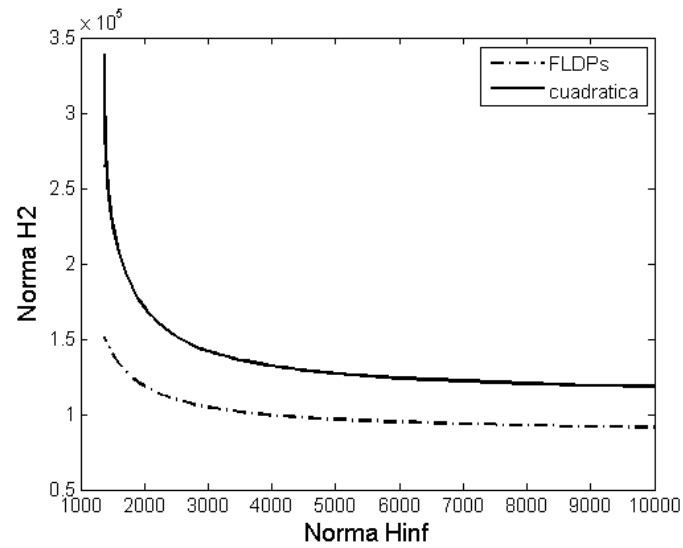
Para la aproximación cuadrática se toma la formulación de (5.2.2) y para la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s se toma la formulación de (5.2.3). Los resultados obtenidos se muestran en la gráfica de la figura 6.1.3 para y en la tabla II, ambos resultados para  $\rho = 0,05$ , los resultados para otro valor de  $\rho$  son similares.

#### OTROS EJEMPLOS:

Adicional al trabajo con el péndulo invertido, se trabajó con 6 sistemas de tercer orden cuyas matrices dinámica y de entrada fueron generadas aleatoriamente, los valores de las matrices seguían una distribución normal con media 0 y varianza 1. Se verificó que el sistema generado fuese controlable y se hizo todo el trabajo de síntesis, obteniendo resultados similares a los presentados para el péndulo, obviamente con límites de las normas  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_\infty$  distintos y generalmente menores. Por lo que se puede decir que las conclusiones derivadas de este desarrollo son bastante generales. Una conclusión adicional que aportan estos ejemplos aleatorios es que de acuerdo al valor máximo permitido de la incertidumbre en la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s es el orden de  $\epsilon$ , es decir para  $\rho_{max}$  muy grande el valor de  $\epsilon$  óptimo es muy pequeño y viceversa.

Cuadro 6.2: Comparación de resultados para el problema de síntesis multicriterio

$\mathcal{H} - \infty$	$\mathcal{H}_2$ cuadratica	$\mathcal{H}_2$ FLDP	$\epsilon$
2000	$1,7066 * 10^5$	$1,0352 * 10^5$	0.057
3000	$1,4201 * 10^5$	$0,9155 * 10^5$	0.064
4000	$1,3218 * 10^5$	$0,8680 * 10^5$	0.068
5000	$1,2687 * 10^5$	$0,8425 * 10^5$	0.077
6000	$1,2392 * 10^5$	$0,8266 * 10^5$	0.075
7000	$1,2225 * 10^5$	$0,8147 * 10^5$	0.079
8000	$1,2041 * 10^5$	$0,8067 * 10^5$	0.079
9000	$1,1928 * 10^5$	$0,8009 * 10^5$	0.086

Figura 6.1.3 Norma  $\mathcal{H}_2$  vs. Norma  $\mathcal{H}_\infty$

## 6.2. Sistema en Tiempo Discreto

Sea un sistema incierto de tiempo discreto definido por:

$$\mathbf{A}(\nu) = \mathbf{A}_{00} + r_1 \mathbf{A}_{01} + r_2 \mathbf{A}_{02}$$

$$\mathbf{A}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,3 & -0,01 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,01 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,01 \end{bmatrix}$$

$$|r_1| < \rho \quad y \quad |r_2| < \rho$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{1\infty} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{1\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{12\infty} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Este sistema no es asociado a ningún sistema físico en particular, se utilizó por conveniencia académica.

### 6.2.1. Estabilidad (Realimentación de Estado)

#### Aproximación cuadrática

Tomando la formulación de (5.3.2) se tiene que el sistema (1.2.1) será estable si

Existen  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  tal que

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A}_i \mathbf{P} + \mathbf{B}_2 \mathbf{R} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}'_i + \mathbf{R}' \mathbf{B}'_2 & \mathbf{P} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{R}$  con  $\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{P}^{-1}$ .

El valor máximo del parámetro incierto encontrado fue  $\rho = 1,43$ . La solución que se encontró para dicho valor fue

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -7,5544 * 10^{-8} & 0,3001 & -0,0100 \end{bmatrix}$$

### Aproximación por $\mathcal{FLDP}$ s

Tomando la formulación de (5.3.3) se tiene que el sistema (1.2.1) será estable si

Existen  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}'_i$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{R}$  tales que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_i & \mathbf{A}_i\mathbf{G} + \mathbf{B}_2\mathbf{R} \\ \mathbf{G}'\mathbf{A}'_i + \mathbf{R}'\mathbf{B}'_2 & \mathbf{G} + \mathbf{G}' - \mathbf{P}_i \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$\forall \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$\mathcal{LMI}$  en  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{P}_i$ , con  $\mathbf{K} = \mathbf{R}\mathbf{H}^{-1}$ .

Para el valor máximo de  $\rho$  encontrado por la aproximación cuadrática, se encontró

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6,5538 * 10^{-6} & 0,3000 & -0,0100 \end{bmatrix}$$

Por esta aproximación el valor máximo de incertidumbre es  $\rho = 1,428$ , con el que se obtiene

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5,0054 * 10^{-6} & 0,3000 & -0,0100 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar la solución por la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s es ligeramente mejor, ya que el valor de  $\rho$  máximo es mayor para dicha aproximación que para la aproximación cuadrática.

### 6.2.2. Síntesis $\mathcal{H}_2$ (Realimentación de Estado)

La formulación utilizada para la aproximación cuadrática es la presentada en (5.3.2) y la utilizada para la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s es la presentada en (5.3.3) La solución obtenida para  $\rho = 1,4$  fue  $\mu = 28,2186$  y

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0,0000 & 0,3000 & -0,0100 \end{bmatrix}$$

La solución obtenida para  $\rho = 1,4$  fue  $\mu = 27,5284$  y

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0,0000 & 0,3000 & -0,0100 \end{bmatrix}$$

En la figura 6.2.2.5 se muestra el comportamiento de la norma  $\mathcal{H}_2$  del sistema con realimentación de estado, en función del parámetro incierto. Como se puede observar, el resultado arrojado por ambas aproximaciones es muy similar, sin embargo, la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s resulta mejor conforme la incertidumbre aumenta.

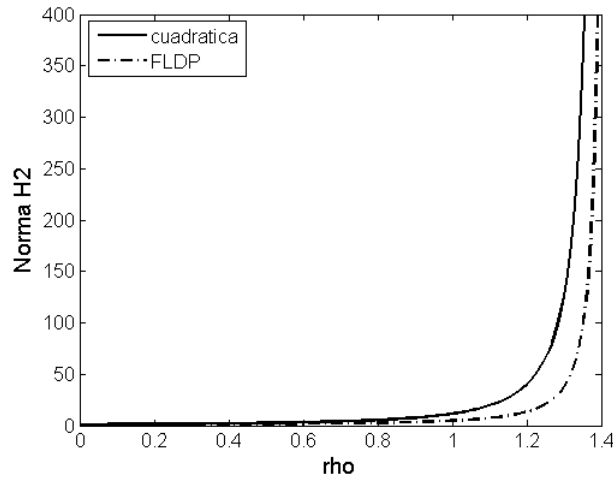


Figura 6.2.2

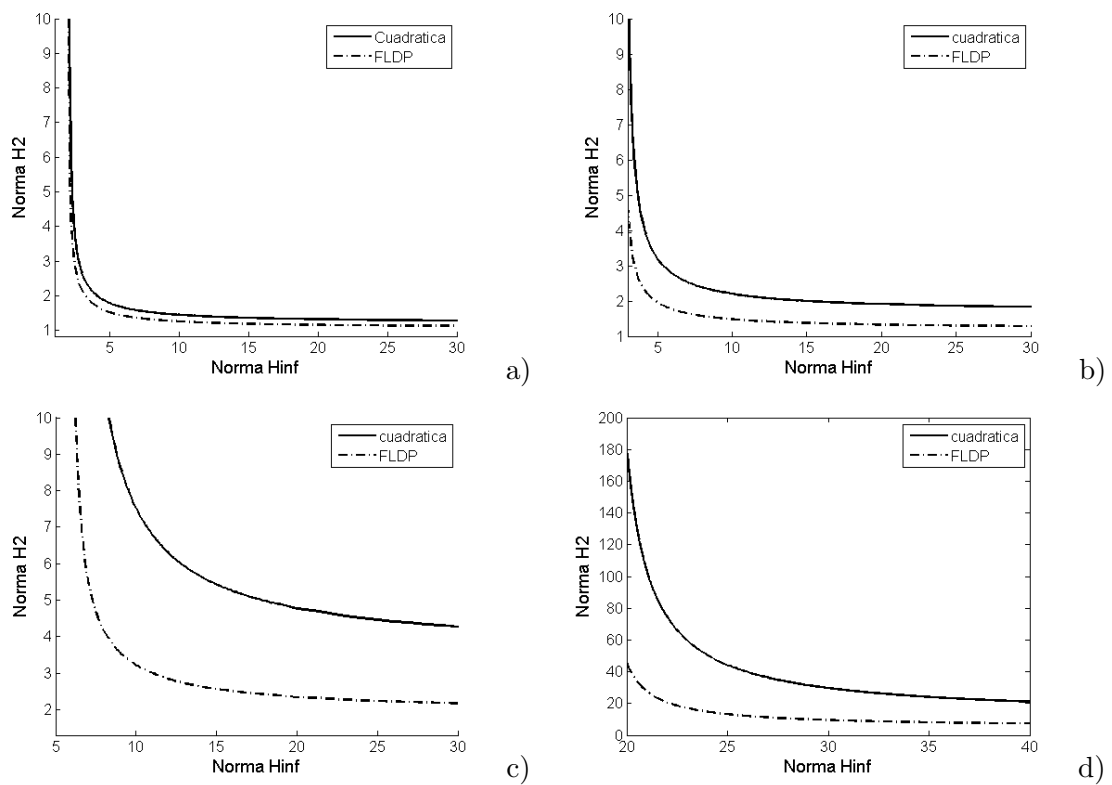
.5

### 6.2.3. Síntesis Multicriterio (Realimentación de Estado)

La formulación utilizada para la aproximación cuadrática es la presentada en (5.3.2) y la utilizada para la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s es la presentada en (5.3.3).

Las soluciones obtenidas para  $\rho = 0,1$ ,  $\rho = 0,4$ ,  $\rho = 0,65$  y  $\rho = 1,4$  se muestran en las figura 6.2.3, donde se hizo un barrido en  $\lambda$  desde el valor mínimo para el cual el problema es factible, hasta un valor suficientemente grande, que no afecte sobre la restricción de la norma  $\mathcal{H}_2$ , el vector que se genera como  $\lambda$  es un vector de incrementos lineales por zonas, es decir, por ejemplo para  $5 < \lambda < 20$  el incremento entre los valores del vector es de 0.01, mientras que para  $21 < \lambda < 50$  los incrementos son de 0.1 y finalmente para  $51 < \lambda < 200$  los incrementos son de 1. En todos los casos la solución con la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s es mejor que con la aproximación cuadrática, sin embargo, al igual que en el caso de la síntesis  $\mathcal{H}_2$ , los mejores resultados se observar para un dominio de incertidumbre grande.

Algo que vale la pena resaltar, es que aunque tanto para sistemas de tiempo continuo como para sistemas de tiempo discreto, los resultados obtenidos por la aproximación por  $\mathcal{FLSP}$ s es mucho mejor, en el caso discreto se nota como la gráfica de norma  $\mathcal{H}_2$  vs. norma  $\mathcal{H}_\infty$  tiende a tener una curvatura mucho más pronunciada para esta aproximación, mientras que en el caso continuo, es como si la gráfica obtenida por la aproximación cuadrática se desplazara un poco hacia el origen del plano, sin verse afectada la curvatura de la misma.



**Figura 6.2.3.6** Norma  $\mathcal{H}_2$  vs. Norma  $\mathcal{H}_\infty$  a) para  $\rho = 0,01$ , b) para  $\rho = 0,04$ , c) para  $\rho = 0,065$  y d) para  $\rho = 1,4$



# Conclusiones

A excepción de la formulación para síntesis de controladores por realimentación de salida dinámica en la aproximación cuadrática para incertidumbres politópicas, todos los otros problemas pueden ser formulados como LMIs, por lo que se puede decir que se encuentran resueltos.

De las aplicaciones numéricas resulta evidente que para incertidumbres politópicas, para sistemas tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto, la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s proporciona resultados muchísimo mejores que la aproximación cuadrática conforme el dominio de la incertidumbre aumenta, vale la pena resaltar que para un sistema sin incertidumbres los resultados son iguales utilizando una u otra aproximación; este resultado era de esperarse, debido a que es bien sabido, en el caso de estabilidad, que la estabilidad cuadrática implica la estabilidad robusta, por  $\mathcal{FLDP}$ s, ya que lo que se hace en la formulación por  $\mathcal{FLDP}$ s es relajar un poco las restricciones de la formulación en la aproximación cuadrática, con la adición de la matriz  $\mathbf{G}$ , para evitar que las matrices de Lyapunov  $\mathbf{P}_i$  estén multiplicadas por alguna de las matrices del sistema.

Pese al trabajo extra que implica utilizar la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s en el caso continuo, debido a la búsqueda unidireccional sobre  $\epsilon$ , los resultados hacen que dicho trabajo extra valga la pena. Algo que no se había visto anteriormente es la naturaleza del comportamiento de  $\epsilon$  en función del parámetro incierto, esto resulta interesante, en la medida que el comportamiento no es lineal, pero sigue una tendencia similar en todos los casos. Resulta bastante conveniente que los resultados a los que se llega en tiempo discreto utilizando la aproximación por  $\mathcal{FLDP}$ s sean tan buenos y no representen mayor carga computacional, a diferencia de lo que ocurre en tiempo continuo, ya que en las aplicaciones los filtros digitales, con las mejoras en velocidad que han adquirido los dispositivos programables, empiezan a tornarse ampliamente utilizados, sobretodo en sistemas que necesiten de controles robustos, que han de ser sistemas muy caros en los que utilizar un dispositivo programable no ha de ser un problema de costos.

# Trabajos Futuros

En el campo del control robusto el espectro es bastante amplio, sin embargo centrados en el problema de síntesis multicriterio, sería interesante trabajar sobre la definición polinómica de las funciones de Lyapunov dependientes de parámetros, que en la mayoría de trabajos han sido consideradas dependientes de parámetros en forma afín, en este campo algunos trabajos se han desarrollado para el problema de análisis, pero para el problema de síntesis todavía no se ha trabajado, en parte por la complejidad del problema.

Por otro lado, sería interesante tratar de resolver algunos ejemplos numéricos de realimentación de salida dinámica para verificar si los resultados por realimentación de estado pueden ser o no extendidos a este caso, para el caso de la aproximación cuadrática de incertidumbres politópicas se podría utilizar la aproximación propuesta en [5].

En cuanto a los resultados obtenidos de este trabajo, valdría la pena verificarlos con otros programas de simulación para problemas programación semidefinida.

Finalmente, con todos los trabajos publicados hasta la fecha de esta temática, sería muy útil hacer un libro de texto didáctico de control robusto multicriterio para uso de estudiantes de maestría en ingeniería.

# Bibliografía

- [1] J. Ackermann, D. Kaesbauer, W. Sienel & R. Steinhauser, *Robust Control, Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, 1993. 406p.
- [2] P. Apkarian, H.D. Tuan & J. Bernussou, *Continuous-Time Analysis, Eigenstructure Assignment, and  $H_2$  Synthesis with Enhanced Linear Matrix Inequalities (LMI) Characterizations*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, No. 12, pp 1941-1946, 2001.
- [3] R. Ariza, *Control Robusto Multicriterio. Métodos de Solución, un Estado del Arte*. Tesis doctoral, Universidad de los Andes, 2005. 188p.
- [4] J. Bernussou *Notas de Clase, Curso de Control Robusto*. Universidad de los Andes, 2005.
- [5] J. Bernussou, J.C. Geromel & H. Korogui *On Robust Output Feedback Control For Polytopic Systems*. Proceedings of the 44th Conference on Decision & Control, Seville, Spain, pp 5018-5013, 2005.
- [6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. 340p.
- [7] W. Colmenares & F. Tadeo, *Apuntes sobre control robusto y multiobjetivos de sistemas*. Editorial Equinoccio.

- [8] G.E. Dullerud & F. Paganini, *A course in Robust Control Theory, A Convex Approach*. Springer-Verlag, 2000. 417p.
- [9] Y. Ebihara, T. Hagiwara & T. Shimomura, *Multiobjective State-Feedback Control Design with Non-Common LMI Solutions: Change of Variables via Affine Functions*. Proceedings of the American Control Conference, pp 848-853. 2001.
- [10] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub & M. Chilali, *LMI Control Toolbox*. The Mathworks Inc., 1994.
- [11] J.C. Geromel, J. Bernussou & M.C. de Oliveira,  *$H_2$  Norm Optimization with Constrained Dynamic Output Feedback Controllers: Decentralized and Reliable Control*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 44, No. 7, pp 1449-1454, 1999.
- [12] J.C. Geromel, P.L.D. Peres & S.R. Souza, *Convex Analysis of Output Feedback Control Problems: Robust Stability and Performance*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, No. 7, pp 997-1003, 1996.
- [13] D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle & J. Lasserre *On Parameter-dependent Lyapunov Functions for Robust Stability of Linear Systems*. Proceedings of the 43rd Conference on Decision & Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp 887-892, 2004.
- [14] I. Masubuchi, A. Ohara & N. Suda *LMI-based Output Feedback Controller Design*. Proceedings of the American Control Conference, Seattle, Washington, USA, pp 3473-3477, 1995.
- [15] M.C. de Oliveira, J. Bernussou & J.C. Geromel, *A New Discrete-time Robust Stability Condition*. Systems and Control Letters 37, pp 261-265, 1999.
- [16] M.C. de Oliveira, J.C. Geromel & J. Bernussou *An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems*. Proceedings of the

- 38th Conference on Decision & Control, Phoenix, Arizona, USA, pp 3611-3616, 1999.
- [17] C. Scherer, P. Gahinet & M. Chilali, *Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, No. 7, pp 896-911, 1997.
- [18] K. Zhou & J.C. Doyle, *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998. 411p.