

**Construcción de una Herramienta de Apoyo en la Toma de Decisiones de  
Inversión en los Fondos de Pensiones**

**Ricardo Elías Pedraza Gutiérrez**

**Universidad de los Andes  
Facultad de Ingeniería Industrial  
Bogotá 2007**

**Construcción de una Herramienta de Apoyo en la Toma de Decisiones de  
Inversión en los Fondos de Pensiones**

Trabajo de Tesis

Presentado a

Departamento de Ingeniería Industrial

**Por**

**Ricardo Elías Pedraza Gutiérrez**

**Asesor**

**Andrés Medaglia, PhD.**

**Profesor Asociado**

Proyecto de Grado Maestría Ingeniería Industrial

**Universidad de los Andes**

**Facultad de Ingeniería Industrial**

**Bogotá 2007**

## **AGRADECIMIENTOS**

**A Andrés Medaglia por las ideas, los aportes y los conocimientos que compartió a través del desarrollo del proyecto. Por su interés, dedicación y tiempo. Gracias por la ayuda y el respaldo que me dio siempre.**

**A Carlos Domínguez y Maria Fernanda Acuña por su apoyo y colaboración en el desarrollo del proyecto. Los aportes y sugerencias recibidas fueron determinantes en la obtención de una herramienta útil para la toma de decisiones de inversión. Gracias por su interés.**

**A Jorge Sefair por su interés y colaboración en el desarrollo del modelo y de la herramienta para la toma de decisiones de inversión. Sus ideas y comentarios fueron cruciales en la obtención del resultado final. Gracias por sus aportes y dedicación en el proyecto.**

**Gracias a Dash Optimization por proveer las licencias de Xpress-MP bajo el Academic Partner Program suscrito con la Universidad de los Andes.**

## Tabla de Contenido

1.	Introducción.....	7
2.	Configuración de Portafolios Financieros para Fondos de Pensiones.....	9
2.1.	Introducción.....	9
2.2.	Restricciones Legales .....	9
2.3.	Restricciones Internas.....	10
2.4.	Instrumentos Financieros.....	10
2.4.1.	Títulos de deuda pública emitidos o garantizados por Nación.....	11
2.4.2.	Títulos emitidos o garantizados por entidades vigiladas por la Superintendencia Financiera.....	11
2.4.3.	Títulos emitidos o garantizados por entidades no vigiladas por la Superintendencia Financiera.....	12
2.4.4.	Acciones .....	12
2.4.5.	Fondos Comunes Ordinarios .....	12
2.4.6.	Monedas.....	13
2.4.7.	Papeles emitidos por otras naciones o entidades en el exterior .....	13
2.4.8.	Fondos Internacionales .....	13
2.4.9.	Otros activos.....	14
2.5.	Proporciones de Inversión .....	14
2.6.	Series Históricas .....	17
2.6.1.	Deuda Pública: TES tasa fija .....	17
2.6.2.	Deuda Pública: TES en UVR .....	18
2.6.3.	Deuda Corporativa.....	19
2.6.4.	Acciones .....	21
2.6.5.	Fondos comunes ordinarios .....	21
2.6.7.	Títulos emitidos por entidades del exterior .....	22
3.	Medidas de Riesgo.....	23
3.1.	Introducción.....	23
3.2.	Varianza.....	23
3.3.	Desviación Media Absoluta.....	24
3.4.	Pérdida Máxima.....	26
3.5.	CVaR .....	27
4.	Selección de Portafolios de Inversión.....	30
4.1.	Introducción.....	30
4.2.	Modelo composición de portafolios .....	30
4.3.	Método para Solucionar el Problema de Composición de Portafolios .....	33
4.3.1.	Programación del modelo .....	34
4.4.	Estructura del programa y flujo de información.....	35
5.	Resultados.....	40
5.1.	Introducción.....	40
5.2.	Fronteras Eficientes .....	40
5.2.1.	FE para la búsqueda del portafolio con el mismo nivel de riesgo .....	40
5.2.2.	FE para la búsqueda del portafolio con la composición más similar .....	42
5.3.	Sugerencias .....	45
6.	Evaluación .....	51

6.1. Pruebas del Modelo y del Método de Solución en el Mercado Financiero	
Colombia.....	51
7. Conclusiones.....	53
8. Bibliografía.....	56
9. Apéndice A.....	59

## Lista de Ilustraciones

Ilustración 1. Proceso construcción bases de datos .....	35
Ilustración 2. Pantalla archivo PrecioInversiones.xls .....	36
Ilustración 3. Pantalla programa y resultados en Xpress-MP.....	37
Ilustración 4. Resolución del problema y sugerencias.....	38
Ilustración 5. Pantalla Interfaz de archivos de resultados.....	39
Ilustración 6. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-Varianza .....	41
Ilustración 7. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-Desviación Absoluta Media.....	41
Ilustración 8. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-Máxima Pérdida .....	42
Ilustración 9. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-CVaR .....	42
Ilustración 10. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-Varianza .....	43
Ilustración 11. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-Desviación Absoluta Media....	43
Ilustración 12. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-Máxima Pérdida .....	44
Ilustración 13. Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-CVaR .....	44
Ilustración 14. Ejemplo Sugerencias del Modelo.....	47
Ilustración 15. Resultados SAS para las pruebas de normalidad multivariada .....	60
Ilustración 16. Q-Q plot, resultados pruebas SAS para normalidad multivariada.....	61

## Lista de Tablas

Tabla 1. Resumen Límites de inversión.....	16
Tabla 2. Proporciones del portafolio actual y del portafolio recomendado.....	50
Tabla 3. Rentabilidades para portafolio actual y portafolios con el mismo nivel de riesgo	51
Tabla 4. Rentabilidades para portafolio actual y portafolios con la composición más similar al actual .....	51

## 1. Introducción

Los fondos de pensiones están encargados de administrar el capital que los trabajadores y los empleadores aportan mensualmente de forma obligatoria. La cifra que están manejando los fondos al 31 de Octubre de 2006 es de \$41.5 billones según la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC). El Departamento de Inversiones, en cada fondo, está encargado del manejo del capital, este departamento tiene como objetivo principal generar la mayor rentabilidad posible y de esta forma obtener ganancias para los afiliados y para la empresa. Es en la búsqueda de este objetivo, donde se aportan nuevas herramientas que la gerencia de inversiones pueda utilizar para tomar las decisiones de inversión. El resultado esperado es obtener mayor rentabilidad manteniendo una exposición al riesgo según lo pactado al interior del fondo.

A diario, los administradores del capital, están buscando oportunidades de inversión para lo cual hacen un seguimiento a los precios de los activos. En esta búsqueda se estudian tendencias, niveles, comportamientos históricos, ciclos, noticias, entre otros aspectos. Sin embargo, de acuerdo a las teorías relacionadas con la eficiencia de los mercados saber el comportamiento futuro de los precios de los activos no es posible, los precios de los instrumentos son variables aleatorias y por ende no es posible saber de antemano que pasará en el futuro.

Es importante resaltar que en la práctica y según el testimonio de los administradores de capital, lo ideal, es tener herramientas que les permitan hacer tanto el seguimiento histórico de los precios, para tener idea de cuál fue el comportamiento de los precios en el pasado y cuál es el probable comportamiento futuro, como tener en cuenta la aleatoriedad de los precios, encontrar la relación entre las variables y construir un modelo que tenga en cuenta estos aspectos.

En este trabajo se busca complementar la experiencia y los conocimientos de los administradores a través de modelos matemáticos y herramientas que les permitan tener en cuenta la aleatoriedad. Debido al comportamiento incierto de los precios, se han

desarrollado varios modelos matemáticos; los modelos buscan definir la relación entre los precios de las posibles inversiones, al obtener estas relaciones es posible conformar portafolios que generan cierto nivel de rentabilidad reduciendo al máximo el riesgo<sup>1</sup>. La persona que introdujo el primer modelo para la composición de portafolios fue Markowitz (1952), luego han venido apareciendo nuevos modelos que buscan representar en mejor medida la realidad. En este proyecto se evalúan algunos de los modelos más conocidos, la principal diferencia entre modelos está en las medidas de riesgo que utiliza cada uno de ellos. Las cuatro medidas que se evalúan en este trabajo son: la varianza de un portafolio (modelo de Markowitz, 1952), la desviación absoluta media (modelo de Konno, 1991), la pérdida máxima (modelo de Krokmal, 2003) y finalmente el CVaR (modelo de Rockafellar y Uryasev, 1999).

Este trabajo se encuentra organizado en 7 secciones. En esta primera sección, se presenta una breve introducción al trabajo realizado. En la segunda sección, se encuentra información acerca de los instrumentos financieros, información de la reglamentación a la cual están sujetos los fondos de pensiones y la metodología seguida para la construcción de las series históricas. En la tercera sección, se describen las medidas de riesgo que fueron evaluadas. En la cuarta sección, se presentan los modelos de composición de portafolios que se tuvieron en cuenta en el estudio y se presenta el método que se utilizó para solucionarlos. En la quinta sección, se presentan los resultados que obtiene el administrador de los fondos al utilizar el programa diseñado. En la sexta sección se hace un análisis de los resultados. Por último, en la última sección, se presentan las conclusiones del estudio.

---

<sup>1</sup> En este contexto la incertidumbre o volatilidad de los resultados futuros es conocida como riesgo.



## 2. Configuración de Portafolios Financieros para Fondos de Pensiones

### 2.1. Introducción

El objetivo de este estudio es construir una herramienta que los administradores de los fondos puedan usar para tomar las decisiones de inversión. Con este fin, lo primero es analizar cuáles son las normas y restricciones que limitan el espacio de posibles soluciones. Estas normas pueden venir de dos fuentes: la primera, es el ente regulador a nivel estatal; y la segunda, el departamento de riesgo al interior de los fondos. Las restricciones especifican cuáles son los activos que se deben tener en cuenta y en qué proporciones se podrá invertir en ellos.

Luego de definir las restricciones que enfrentan los fondos, se pasará a explicar la forma como se obtuvieron las series de datos. La idea es, tomar los datos que permitan hacer un estudio valido y práctico, algo que sea real. En la práctica la construcción de estas series implica tomar varias decisiones con respecto a: las series correctas, las fuentes de información, la accesibilidad a la información, la coherencia de las series, entre otros aspectos. Todos estos factores que son de vital importancia, son la base de todo el estudio y pueden determinar que un jefe de mesa decida ó no utilizar esta herramienta.

### 2.2. Restricciones Legales

Los fondos de pensiones en Colombia están vigilados por la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC). Esta entidad establece la forma como deben operar los fondos, los sistemas a través de los cuales se pueden hacer operaciones, con quién pueden negociar y lo más importante en qué instrumentos y en qué proporciones pueden invertir los recursos.

La SFC publica en su página de Internet (<http://www.superfinanciera.gov.co>) los documentos que contienen información precisa con respecto a la reglamentación que

deben seguir los fondos. Las normas están contenidas en: la Ley 100 de 1993, artículo 100; la Circular Básica Jurídica, Título IV, Capítulo Cuarto; y el Decreto 1557 de 2001. Más adelante se profundizará en las restricciones que impone esta regulación.

### 2.3. Restricciones Internas

Cada fondo de pensiones tiene un departamento de riesgo que se encarga de hacer una evaluación detallada de los papeles que se encuentran en el mercado. El departamento de riesgo analiza quién es el emisor, qué tan probable es que pueda pagar sus obligaciones, en qué sector de la economía tiene inversiones, entre otros aspectos. De acuerdo a la evaluación se le otorga un cupo máximo. Estas restricciones se presentan para activos pertenecientes a deuda corporativa y acciones. Para el caso de deuda corporativa, por la naturaleza de las series históricas utilizadas, estas restricciones no pudieron ser incluidas. Para el caso de las acciones si se tiene en cuenta la proporción máxima que establece el departamento de riesgo.

### 2.4. Instrumentos Financieros

Los activos que puede tener en su portafolio un fondo de pensiones son aquellos que no representan un alto riesgo de incumplimiento (riesgo crediticio), son activos que se transan de forma activa y que presentan un nivel de rentabilidad aceptable, con estas restricciones se busca usar de forma eficiente los ahorros de los afiliados.

En este estudio no se tuvieron en cuenta la totalidad de activos en los cuales se puede invertir, la selección de los activos a tener en cuenta se hizo de acuerdo a las necesidades de la mesa de inversiones. Algunos activos fueron descartados por ser ilíquidos y/o por falta de información histórica, como es el caso de los bonos emitidos por FOGAFIN. Otros activos se descartaron por políticas internas del fondo de pensiones. A continuación se presenta una descripción de los activos utilizados en el estudio.

#### 2.4.1. Títulos de deuda pública emitidos o garantizados por Nación

Son títulos emitidos por el Estado para financiar sus actividades económicas. Hay diferentes clases, hay títulos en pesos que pagan una tasa fija, hay títulos en UVR's (la unidad de valor cambia), hay títulos indexados al Índice de Precios al Consumidor (IPC), estos últimos son muy ilíquidos. Todos estos títulos son conocidos como TES.

La Nación también puede emitir títulos en otras monedas, estos títulos se conocen como Yankees<sup>2</sup>, es una alternativa de inversión, sin embargo es necesario tener en cuenta que son títulos en moneda extranjera, esto va a ser de gran importancia cuando se habla de las restricciones a las cuales están sujetos los fondos.

Hay otros instrumentos que no son emitidos o garantizados por la Nación directamente, pero que son emitidos o garantizados por entidades estatales de acuerdo con la Ley 80 de 1993, el Decreto 2681 de 1993 o las normas que los modifiquen o adicionen. Para estos títulos no fue posible construir las series históricas por su baja bursatilidad<sup>3</sup>, sin embargo se asumió que los precios de estos activos se mueven de manera similar a los TES.

#### 2.4.2. Títulos emitidos o garantizados por entidades vigiladas por la Superintendencia Financiera

Además de la Nación, cualquier entidad puede emitir bonos con el objetivo de llevar a cabo sus proyectos. Los bonos emitidos por estas organizaciones se clasifican como deuda corporativa. Si la entidad es vigilada por la SFC pertenece al sector financiero (bancos). Estos papeles se clasifican en diferentes grupos de acuerdo al emisor, a la fecha de maduración y a las características del título. En este

---

<sup>2</sup> Se conoce como Yankees a los papeles que emite una Nación, no necesariamente Colombia, en moneda extranjera. En este estudio solo se tienen en cuenta los Yankees emitidos por el gobierno colombiano.

<sup>3</sup> Bursatilidad es un sinónimo de liquidez.

estudio solo se tuvieron en cuenta los bonos que corresponden a las categorías con calificación AAA<sup>4</sup>.

#### 2.4.3. Títulos emitidos o garantizados por entidades no vigiladas por la Superintendencia Financiera

Además de los bonos corporativos que pertenecen al sector financiero, también hay bonos corporativos del sector real. En este caso existen exactamente las mismas categorías del sector financiero y también solo se tuvieron en cuenta las categorías de bonos con calificación AAA.

#### 2.4.4. Acciones

Las acciones son parte del capital de una empresa, estos papeles se colocan en el mercado para que los inversionistas las puedan comprar. Las acciones en el mercado son clasificadas por la SFC en diferentes grupos de acuerdo a la liquidez; alta, media, baja o mínima bursatilidad. En este estudio se tuvieron en cuenta las acciones de media y alta bursatilidad. Los fondos de pensiones pueden invertir en acciones de baja y mínima bursatilidad, sin embargo no son atractivas para los administradores. Es importante dejar claro que en este grupo solo se tiene en cuenta las acciones que se transan en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC).

#### 2.4.5. Fondos Comunes Ordinarios

Se conocen como Fondos Comunes Ordinarios a los fondos manejados por las Sociedades Fiduciarias. Estas son entidades que manejan capital. Los inversionistas le entregan el capital y las Fiduciarias les aseguran un rendimiento específico. El rendimiento que prometen los administradores de estos fondos cambia de acuerdo a las condiciones diarias de mercado.

---

<sup>4</sup> De acuerdo al emisor, los papeles reciben una calificación de riesgo. AAA es la categoría más alta. Los fondos de pensiones no invierten en papeles de otras categorías ya que sería asumir demasiado riesgo.

#### 2.4.6. Monedas

Es otra alternativa de inversión para los fondos. En este estudio se tuvieron en cuenta las cuatro monedas en las cuales los fondos de pensiones hacen sus inversiones; el Dólar americano, el Euro, la Libra Esterlina y el Yen.

#### 2.4.7. Papeles emitidos por otras naciones o entidades en el exterior

Así como los bonos emitidos por Colombia para financiarse, hay bonos emitidos por otras naciones del mundo. Obviamente, para que los fondos puedan invertir en ellos, los papeles deben cumplir con ciertas características. Aunque se deberían tener en cuenta los bonos de varios países, en este estudio solo se utilizó la información histórica de los Treasuries (bonos emitidos por Estados Unidos), ya que son los únicos en los cuales se concentra capital representativo.

También existe la posibilidad de invertir en bonos emitidos por entidades diferentes a las naciones. Es decir deuda privada (corporativa) emitida en otros países. Sin embargo, éstos no se tuvieron en cuenta.

#### 2.4.8. Fondos Internacionales

Finalmente, las últimas inversiones que se tuvieron en cuenta son los fondos internacionales. Estos son fondos que manejan portafolios de activos en el exterior. Estos fondos resultan atractivos cuando la rentabilidad que aseguran los papeles en el mercado interno es muy baja para el nivel de riesgo. Este es un mercado poco explotado por los administradores de fondos de pensiones.

#### 2.4.9. Otros activos

De acuerdo a la reglamentación existe la posibilidad de invertir en otros activos como: títulos y bonos hipotecarios, títulos derivados de procesos de titularización no hipotecaria, depósitos a la vista, operaciones de reporto activas, operaciones de reporto pasivas y títulos emitidos por FOGAFIN o FOGACOOOP, sin embargo, como ya se dijo, estos activos no se tuvieron en cuenta por diferentes razones.

La información para la construcción de las series históricas de precios se obtuvo de dos fuentes. La gran mayoría de datos se descargaron de Bloomberg<sup>5</sup>, la otra parte se obtuvo de la base de datos que tiene el fondo de pensiones. Los datos que se descargaron de la segunda fuente son los correspondientes a deuda corporativa y TES en UVR, Bloomberg todavía no maneja información de estos papeles por razones de liquidez y profundidad de los mercados en Colombia. Para extraer esta información fue necesario diseñar consultas en Discoverer<sup>6</sup> que lograran obtener la información necesaria.

#### 2.5. Proporciones de Inversión

Esta sección se concentrará en las restricciones relacionadas con las proporciones de inversión, en la sección 2.4 es claro en cuales activos se puede invertir, ahora se especificará en qué cantidad. A continuación se presenta la reglamentación relacionada con las proporciones máximas de inversión, estas restricciones van a ser de vital importancia en el capítulo donde se presenta el modelo del problema de composición de portafolios financieros.

- La inversión en deuda pública tiene un límite de máximo 60% del capital. Según la regulación la proporción máxima a invertir en deuda pública es 50%. Sin

---

<sup>5</sup> Sistema de información financiera en tiempo real

<sup>6</sup> Discoverer es un programa diseñado para buscar información específica en bases de datos de gran tamaño.

embargo, dado que no hay una serie histórica para los papeles emitidos por FOGAFIN y FOGACOOOP y que la inversión máxima en estos papeles es del 10%, se suman estos dos porcentajes. La decisión de hacer este ajuste se tomó buscando seguir la metodología realizada en el informe del Banco de la República (Jara et al. 2005).

- La deuda corporativa emitida por entidades vigiladas por la Superintendencia Financiera tiene un límite máximo de inversión de 30% del capital.
- La deuda corporativa emitida por entidades no vigiladas por la Superintendencia Financiera tiene un límite máximo de inversión de 30% del capital.
- La inversión en instrumentos de renta variable emitida en el mercado local debe ser máximo de 30% del capital. A este grupo corresponden las acciones y los fondos administrados por las fiduciarias (fondos comunes ordinarios) y los fondos administrados por los comisionistas de bolsa (fondos especiales). Al interior de este grupo existen restricciones adicionales.
  - En acciones de media y alta bursatilidad se debe invertir máximo 30% del capital.
  - En acciones de baja y mínima bursatilidad se debe invertir máximo 5% del capital.
  - En fondos comunes ordinarios la inversión debe ser máximo de 5% del capital
  - En fondos especiales la inversión debe ser máximo de 5% del capital
- La inversión en títulos emitidos por gobiernos extranjeros, entidades del exterior y fondos internacionales debe ser máximo 20% del capital
- La exposición a monedas extranjeras debe ser máximo de 20% del capital. En esta categoría se incluyen las monedas, los papeles emitidos por gobiernos y entidades fuera de Colombia y fondos del exterior. Todos estos activos se

negocian en otras monedas diferentes al peso. En esta categoría también es necesario incluir los papeles emitidos por el gobierno colombiano en otras monedas, conocidos como Yankees<sup>7</sup>. Con excepción de las monedas, los otros papeles que pertenecen a esta categoría, están expuestos a otros límites de acuerdo al tipo de papel.

- Las restricciones correspondientes a los papeles que no se tuvieron en cuenta en el estudio se omitieron o se modificaron.

Las restricciones que se presentan arriba son restricciones por cada uno de los activos, existen restricciones adicionales relacionadas con la proporción del capital que se puede invertir en títulos de un mismo emisor, según la Ley 100 de 1993, el límite es de 10%. Sin embargo, por la naturaleza de las series históricas utilizadas para deuda corporativa es imposible aplicar esta restricción a los modelos. En la tabla 1 se presenta un breve resumen de los límites de inversión.

<b>Tipos de Activos</b>	<b>Máxima Proporción</b>
Deuda Pública	50%
Fogafin y Fogacoop	10%
Deuda corporativa emitida por entidades vigiladas por la SFC	30%
Deuda corporativa emitida por entidades NO vigiladas por la SFC	30%
Renta Variable	30%
Acciones de alta y media bursatilidad	30%
Acciones de baja y mínima bursatilidad	5%
Fondos comunes ordinarios	5%
Fondos especiales	5%
Activos emitidos por gobiernos o entidades extranjeras y fondos internacionales	20%
Exposición a monedas	20%

**Tabla 1.** Resumen Límites de inversión

<sup>7</sup> Se conoce como Yankees a los papeles que emite una Nación, no necesariamente Colombia, en moneda extranjera. En este estudio solo se tienen en cuenta los Yankees emitidos por el gobierno colombiano.



## 2.6. Series Históricas

La construcción de las series históricas fue uno de los pasos más difíciles en el desarrollo de este proyecto. Para cada tipo de título fue necesario llevar a cabo una metodología diferente y buscar diferentes fuentes de información. El objetivo en la construcción de las series históricas es crear una forma eficiente para su consulta y uso en un proceso de toma de decisiones de inversión.

### 2.6.1. Deuda Pública: TES tasa fija

La Nación emite con cierta frecuencia bonos a través de los cuales financia las actividades económicas del país. Cada uno de estos bonos tiene una fecha de vencimiento y un cupón específico. La duración<sup>8</sup> de estos bonos cambia a diario, de lo cual podemos concluir que la volatilidad de los precios disminuye con el paso del tiempo. Estos cambios no permiten que los precios de un bono específico sean usados como series históricas en un análisis de composición de portafolios. Usar estos precios llevaría a resultados incorrectos.

Para solucionar este problema existe una curva cero cupón teórica. Esta curva muestra el rendimiento histórico para un bono con determinada duración y que no paga cupones. Hay dos formas de obtener esta curva, la primera es a través de Bloomberg y la otra es buscar los datos que publica a diario la BVC y calcularla de acuerdo a la metodología que ellos proponen. Como el objetivo es crear una forma

---

<sup>8</sup> La duración es una medida de riesgo, es una medida del cambio en el precio como consecuencia de un cambio en la tasa de descuento. La fórmula matemática utilizada para obtener la duración es la siguiente:

$$D = \frac{1}{P} * \sum_{i=1}^T \frac{i * C_i}{(1+r)^i}$$

Donde,  $D$ : Duración  
 $P$ : Precio del Bono  
 $C_i$ : Capital que paga el bono en el tiempo  $i$   
 $r$ : Tasa de descuento

que permita la actualización y el uso de la información de forma eficiente se decidió bajar los datos de Bloomberg. Se construyó un archivo en Excel que descarga las tasas automáticamente con la ayuda del History Wizard<sup>9</sup>. Luego de obtener las tasas de descuento para cada uno de los bonos, se calcula el precio, el cual se obtiene a través de la ecuación 1.

$$P_i = \frac{C_i}{(1 + r_i)^i} \quad \text{Ecuación 1}$$

Donde,  $P_i$ : Precio del bono con duración  $i$   
 $C_i$ : Flujo de caja que genera el bono en el tiempo  $i$   
 $r_i$ : Tasa de descuento para el bono con duración  $i$

El cálculo consiste en traer a valor presente los flujos de caja que generará en el futuro el activo. Los flujos de caja se descuentan utilizando las tasas que bajan de Bloomberg. Se construyeron 5 series de tiempo para este sector, la diferencia está en la duración. Las duraciones que se tuvieron en cuenta fueron. 2 años, 3 años, 5 años, 7 años y 10 años.

#### 2.6.2. Deuda Pública: TES en UVR

Las series históricas de los rendimientos de la curva cero cupón para TES en UVR no están en Bloomberg, por esta razón, fue necesario diseñar una consulta en Discoverer para obtener los betas que publica a diario la BVC y de esta forma poder generar la curva. La formula que se utiliza para generar los puntos de la curva para los TES es:

---

<sup>9</sup> Es una herramienta que permite bajar los datos de Bloomberg a Excel.

$$r_{uvr}(t) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) * \left[ \frac{1 - \exp(-t/\tau)}{(t/\tau)} \right] - \beta_2 * \exp(-t/\tau) \quad \text{Ecuación 2}$$

Donde:  $r_{uvr}(t)$ : Tasa de descuento correspondiente para bonos con madurez  $t$   
 $\beta, \tau$ : Parámetros publicados por BVC.  
 $t$ : Periodo de madurez para el bono con tasa  $r_{uvr}(t)$

Luego de obtener las tasas histórica se calcula el precio. En este caso por ser un papel en UVR la tasa que se obtiene para cada plazo (tasa en UVR) debe ser transformada a una tasa corriente en pesos. Esta transformación permite que los TES tasa fija y los TES UVR sean tratados con la misma unidad (peso) y puedan ser comparados. La transformación está dada por:

$$r_c = (1 + IPC) * (1 + r_{uvr}) - 1 \quad \text{Ecuación 3}$$

Donde,  $r_c$ : Tasa corriente en pesos  
 $IPC$ : Cambio en el índice de precios al consumidor en el último año  
 $r_{UVR}$ : Tasa en UVR

El último paso es descontar los flujos de caja utilizando la Ecuación 1. Al igual que en el caso de los TES tasa fija, en este caso se construyeron las mismas 5 series (utilizando las mismas duraciones).

### 2.6.3. Deuda Corporativa

En este sector pasa exactamente lo mismo que en el de deuda pública, la duración e incertidumbre de los bonos se va reduciendo a medida que pasa el tiempo, por esta razón los precios históricos de los bonos de este sector tampoco pueden ser utilizados en el estudio. En este caso, se construyeron series históricas de

la tasa de descuento con la metodología propuesta por la BVC. La BVC publica a diario unos márgenes, éstos se publican por categorías.

Las características que diferencian a una categoría de otra son varias. Primero, existe una división entre los bonos emitidos por entidades del sector financiero y entidades del sector real. Segundo, hay una división por la tasa a la cual están indexados, algunos están indexados a tasa fija, otros al IPC y otros a la DTF. Tercero, hay una división por tiempo de madurez<sup>10</sup>. Por último, existe la división por calificación de ries go.

En este estudio se tuvieron en cuenta tanto el sector financiero como el sector real. Para el sector financiero se obtuvieron series históricas para títulos indexados en tasa fija, IPC y DTF, mientras que para el sector real tan solo para títulos indexados en IPC y DTF. Para cada sector y cada tipo de tasa se tuvieron en cuenta los mismos 5 periodos de madurez que se tuvieron en cuenta en el caso de los TES.

Continuando con el tema de la metodología que se utilizó para estimar los precios, se construyó una consulta en Discoverer que permite discriminar entre los títulos y hacer consultas específicas para cada uno de los grupos que se tuvo en cuenta. A través de esta consulta se obtiene el margen histórico para cada categoría. Al tener el margen se pueden calcular las tasas corrientes para los títulos de tasa fija, IPC o DTF con las ecuaciones 4, 5 y 6, respectivamente

$$r_c(t) = (1 + \text{margen}(t)) * (1 + r_{ff}(t)) - 1 \quad \text{Ecuación 4}$$

$$r_c(t) = (1 + \text{margen}(t)) * (1 + IPC) - 1 \quad \text{Ecuación 5}$$

$$r_c(t) = (1 + \text{margen}(t)) * (1 + DTF) - 1 \quad \text{Ecuación 6}$$

---

<sup>10</sup> Tiempo que le falta al bono para llegar a la fecha de vencimiento.

Donde,	$r_c(t)$ :	Tasa corriente para madurez t
	$\text{margen}(t)$ :	Margen publicado por la BVC para determinada categoría con madurez t.
	$r_f(t)$ :	Rendimiento sobre la curva cero cupón de TES para madurez t.
	$IPC$ :	Índice de precios al consumidor
	$DTF$ :	Tasa para los certificados de depósito a término fijo

Esta información no está en Bloomberg, fue necesario realizar consultas con Discoverer para buscar la información en la base de datos del fondo. Las consultas son muy específicas y pueden ser utilizadas en cualquier momento para actualizar los precios de los bonos.

#### 2.6.4. Acciones

Los precios históricos de las acciones están en Bloomberg y se descargan automáticamente al mismo archivo donde bajan las tasas de los TES tasa fija. Al igual que para los TES, se debe utilizar la herramienta History Wizard para descargarlos.

#### 2.6.5. Fondos comunes ordinarios

Esta información está publicada en la página de la SFC, para cada uno de los fondos comunes hay una rentabilidad efectiva anual. Para la construcción de la serie histórica se tomó el promedio de los rendimientos cada día.

#### 2.6.6. Monedas

El valor de las monedas se descargó de Bloomberg. Con excepción del Dólar americano, ninguna moneda estaba valorada en pesos. El precio de los Euros y de

las Libras Esterlina estaba en Dólares por Unidad de Euro o Libra Esterlina. El precio del Yen estaba en Yenes por unidad de dólar. Fue necesario utilizar la TRM para encontrar el valor de cada una de ellas en pesos.

#### 2.6.7. Títulos emitidos por entidades del exterior

Las series históricas de las tasas de estos activos se descargan automáticamente de Bloomberg. Al igual que en el caso de los TES se utilizó la ecuación 1 para traer a valor presente los flujos de caja. Luego de obtener el valor presente en las monedas en que fueron emitidos los activos, se convirtió el precio a pesos usando la TRM, para hacer este cambio de moneda se utilizó la ecuación 7.

$$P_{Pesos}(t) = P_{Dólares}(t) * TRM \quad \text{Ecuación 7}$$

Donde,  $P_{Pesos}(t)$ : Precio en pesos

$P_{Dólares}(t)$ : Precio en Dólares

$TRM$ : Tasa representativa de Mercado

#### 2.6.8. Fondos Internacionales

Finalmente, se tomó un índice como indicador para los fondos internacionales. El valor del índice se descarga de Bloomberg.

La información que se obtiene de Bloomberg baja automáticamente a un archivo de Excel. El archivo está programado para que actualice la información y siempre tenga la serie histórica de los precios diarios de los últimos 2 años. Para obtener el precio de todos los instrumentos en un solo archivo se diseñó una macro que toma la información de los otros archivos y hace la valoración para todos los papeles. De esta forma se logra acumular el precio de todas las posibles inversiones en un solo archivo y conformar la base de datos que se necesita en el estudio.

### 3. Medidas de Riesgo

#### 3.1. Introducción

Un tema de especial interés en el mundo financiero es el manejo de riesgo. Las entidades financieras están expuestas a cinco tipos de riesgo, los cuales son: riesgo de crédito, riesgo de mercado, riesgo operacional, riesgo legal y riesgo de liquidez. En este estudio nos enfocaremos en el cubrimiento de riesgo de mercado. El riesgo de mercado está asociado con la incertidumbre de los precios de los activos, a través del manejo de riesgo se busca eliminar impactos en contra del capital de la firma.

A través de la historia se han presentado diferentes medidas de riesgo. El primer modelo para conformación de portafolios fue propuesto por Markowitz (1952), en este modelo se utilizaba la varianza como medida de riesgo. A través del tiempo se han desarrollado estudios que han demostrado qué tan apropiadas son las medidas y qué tan ajustados a la realidad son los supuestos de cada una de ellas. Szegö (2005) establece las condiciones que debe cumplir una medida de riesgo para que sea apropiada.

En este estudio se evaluaron cuatro medidas de riesgo, las cuales son: la varianza de un portafolio, medida de riesgo propuesta por Markowitz (1952), la desviación media absoluta, propuesta en Konno (1991), la pérdida máxima, utilizada por Krokmal (2003) y CVaR, propuesta por Rockafellar y Uryasev (1999). A continuación se presentara cada una de ellas.

#### 3.2. Varianza

El modelo de Markowitz (1952) (al cual nos referiremos como modelo de Rentabilidad-Varianza) fue la primera propuesta para composición de portafolios financieros. En este modelo se utilizaba como medida de riesgo la varianza del portafolio. El objetivo del modelo es minimizar la varianza del portafolio asegurando un nivel de rentabilidad. La ecuación 8 representa la varianza del portafolio.

$$V(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

**Ecuación 8**

- Donde:  $V(\bar{x})$ : Varianza del portafolio  
 $x_i$ : Proporción del portafolio invertida en el activo i  
 $\sigma_{ij}$ : Covarianza entre el activo i y el activo j  
 $N$ : Activos en el mercado

Note que: la función objetivo del modelo es cuadrática, las funciones cuadráticas son más difíciles de resolver, en el caso de composición de portafolios la dificultad se incrementa al aumentar la cantidad de activos y restricciones que se tienen en cuenta. En este estudio, el modelo Rentabilidad-Varianza tenía 73 variables y 106 restricciones. Por otro lado, es un modelo que utiliza como parámetros la media y la varianza de los retornos, lo cual implica que a través de los dos primeros momentos busca describir la función de distribución de los retornos.

### 3.3. Desviación Media Absoluta

Esta medida de riesgo fue propuesta por Konno (1991) (a este modelo también nos referimos más adelante como modelo Rentabilidad-Desviación media absoluta). Lo que buscaba Konno con esta medida de riesgo era resolver la dificultad que representa solucionar un problema cuadrático cuando existen más de 1,000 variables. Con la desviación media absoluta Konno propone un modelo lineal que obtiene resultados muy similares a los resultados del modelo Rentabilidad-Varianza. A continuación se presenta la medida de riesgo.

$$\zeta(\bar{x}) = \sum_{j=1}^J \theta_j \left| \sum_{i=1}^N r_{ij} x_i - \sum_{k=1}^K \theta_k \sum_{i=1}^N r_{ik} x_i \right|$$

**Ecuación 9**



Donde:  $\zeta(\bar{x})$ : Desviación Absoluta Media  
 $x_i$ : Proporción del portafolio invertida en el activo i  
 $r_{ij}$ : Rentabilidad del activo i en el escenario j  
 $\theta_j$ : Probabilidad de ocurrencia del escenario j  
 $J$ : Escenarios (días, meses o años)  
 $N$ : Activos en el mercado

Konno (1991) desarrolla el siguiente procedimiento que lo lleva a obtener la linealización:

$$r_i = \sum_{k=1}^K \theta_k r_{ik} \quad \text{Ecuación 10}$$

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^J \theta_j \left| \sum_{i=1}^N (r_{ij} - r_i) x_i \right| \quad \text{Ecuación 11}$$

Finalmente para eliminar el valor absoluto y obtener la función lineal utilizada como medida de riesgo, es necesario incluir una variable  $y_j$  auxiliar y añadir dos restricciones adicionales.

$$\zeta(x) = \sum_{j=1}^J \theta_j y_j \quad \text{Ecuación 12}$$

$$y_j + \sum_{i=1}^N (r_{ij} - r_i) x_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad \text{Ecuación 13}$$

$$y_j - \sum_{i=1}^N (r_{ij} - r_i)x_i \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J$$

La ventaja de obtener un grupo de restricciones lineales es que el problema se puede resolver con los métodos tradicionales de programación lineal. Encontrar la solución de un programa lineal es en general más sencillo que encontrar la solución de un programa no lineal. Sin embargo, esta medida al igual que la varianza asume normalidad multivariada. Otra desventaja del modelo es el número de restricciones, en este caso hay dos restricciones adicionales por cada escenario que se tiene en cuenta. En este estudio, el modelo Rentabilidad-Desviación media absoluta tenía 73 variables y aproximadamente 1,048 restricciones, 942 restricciones más que el modelo Rentabilidad-Varianza.

### 3.4. Pérdida Máxima

La pérdida máxima fue evaluada por Kronkmal (2003) en su tesis de doctorado sobre medidas de riesgo (a este modelo nos referimos como modelo Rentabilidad-Pérdida máxima). Como se puede ver a continuación es programación no lineal. Kronkmal no especifica como la usó o si existe algún método para volverla una función lineal.

$$\varpi(\bar{x}) = \max_{1 \leq j \leq J} \left\{ - \sum_i^N r_{ij} x_i \right\} \quad \text{Ecuación 14}$$

Donde:  $\varpi(\bar{x})$ : Pérdida Máxima

$x_i$ : Proporción del portafolio invertida en el activo i

$r_{ij}$ : Rentabilidad del activo i en el escenario j

$J$ : Escenarios (días, meses o años)

$N$ : Activos en el mercado

Se investigó en bases de datos y otras fuentes bibliográficas con el fin de hallar una forma de volver la función lineal, no obstante, no fue posible encontrar literatura al respecto. Como no se encontró una metodología establecida, se hizo un pequeño análisis de la ecuación, se encontró que la función se puede volver lineal a través de unas pequeñas transformaciones.

$$\varpi(X) = z \quad \text{Ecuación 15}$$

$$-\sum_i^n r_{ij} x_i \leq z \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad \text{Ecuación 16}$$

Esta medida de riesgo no asume ninguna distribución para los retornos. En este caso también aumentan el número de restricciones dado que hay una restricción por cada escenario que se tiene en cuenta. En este proyecto, este modelo tenía 73 variables y 630 restricciones.

### 3.5. CVaR

CVaR fue propuesta por Rockafellar et al. (1999) (al modelo también nos referimos como Rentabilidad-CVaR). El CVaR apareció como una reacción de la comunidad académica en contra del VaR, una medida que los reguladores financieros han tratado de imponer como medida de riesgo, pero que tiene características que la hacen una medida incorrecta y que puede llevar a resultados inesperados. VaR está definida como la pérdida máxima que puede llegar a tener un portafolio en un determinado periodo de tiempo, con cierta probabilidad. Szegö (2005) demuestra que el VaR sólo sirve cuando existe normalidad multivariada, caso en el cual genera los mismos resultados que el modelo de Markowitz, lo cual sumado a la dificultad que existe para su cálculo, la convierte en una medida poco atractiva.

Sin embargo, lo atractivo que ha resultado el concepto de VaR ha impulsado al mundo académico a desarrollar medidas que manejen el mismo concepto y para las

cuales no sea necesario el supuesto de normalidad multivariada. Rockafellar et al. (1999) proponen CVaR como la medida que se debe utilizar. CVaR se define como el promedio de las pérdidas que pueden ocurrir por encima del VaR. Lo atractivo de esta medida es que es una función convexa y no es necesario tener el VaR para calcularla. De la definición de CVaR se concluye que:

$$VaR_{\alpha} \leq CVaR_{\alpha} \quad \text{Ecuación 17}$$

Lo que significa que al minimizar CVaR, también se obtiene un VaR pequeño (se estaría cumpliendo con lo esperado por los reguladores). La ventaja que tiene CVaR es que no asume normalidad multivariada en los retornos de los activos, las otras medidas con excepción de “Máxima pérdida”, si lo exigen. La ecuación 18 presenta la fórmula de CVaR.

$$\tilde{F}_{\alpha}(\bar{x}, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j [f(\bar{x}, \bar{r}_j) - \zeta]^+ \quad \text{Ecuación 18}$$

Donde:  $\tilde{F}_{\alpha}(\bar{x}, \zeta)$ : CVaR

$\bar{x}$ : Vector de proporción de inversión

$\bar{r}_j$ : Vector de rentabilidades para el escenario j

$J$ : Escenarios (días, meses o años)

$\zeta$ : Nivel máximo a partir del cual se hace la suma de las pérdidas esperadas.

$\alpha$ : Nivel de confianza par alas pérdidas

$\pi_j$ : Probabilidad de ocurrencia del escenario j

A través de las transformaciones propuestas por Rockafellar (1999) se llega a una ecuación que puede ser usada en programación lineal. A continuación se presentan los pasos que presenta Krokmal et al. (2001) para linearizar la función.

En primer lugar se puede reemplazar la parte interna de la sumatoria usando variables  $z_j$  auxiliares:

$$f(x, \bar{r}_j) - \zeta \leq z_j \quad \text{Ecuación 19}$$

$$z_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad \text{Ecuación 20}$$

Al hacer estos cambios en la ecuación tendríamos:

$$\tilde{F}_\alpha(x, \zeta) = \zeta + (1 - \alpha)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j \quad \text{Ecuación 21}$$

$$f(x, \bar{r}_j) - \zeta \leq z_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad \text{Ecuación 22}$$

$$z_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, J \quad \text{Ecuación 23}$$

Ahora se cuenta con una medida de riesgo que puede ser utilizada en programación lineal. CVaR al igual que la pérdida máxima no exigen el supuesto de normalidad multivariada. Por otro lado en el modelo que utiliza CVaR como medida de riesgo es necesario incluir una restricción por cada escenario. Para este estudio, este modelo tenía el mismo número de variables y restricciones del modelo Rentabilidad-Pérdida máxima.

## 4. Selección de Portafolios de Inversión

### 4.1. Introducción

En esta sección, se desarrolla el modelo para la composición de portafolios en los fondos de pensiones. El modelo incluye todas las restricciones legales e internas ya que se busca hacerlo lo más real posible. El modelo que se presenta es un modelo general, permite cambiar la función objetivo y agregar restricciones (si es necesario) de acuerdo a la medida de riesgo que se quiera evaluar. En las secciones posteriores al modelo se hablará de las características del mismo.

### 4.2. Modelo composición de portafolios

Con el fin de establecer el modelo para el problema de composición de portafolios fue necesario crear subconjuntos de los activos financieros, las restricciones legales obligan a hacer una división por sector de inversión. En el capítulo 2 de este documento, se presentan cuáles son los activos en los que pueden invertir los fondos de pensiones. A continuación estableceremos los conjuntos.

$\mathcal{N} : \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \dots \cup \mathcal{N}_9$  Conjunto de instrumentos y sectores del mercado

$\mathcal{N}_1$  : Sector deuda pública interna

$\mathcal{N}_2$  : Yankees

$\mathcal{N}_3$  : Sector deuda privada vigilada por SFC

$\mathcal{N}_4$  : Sector deuda privada NO vigilada por SFC

$\mathcal{N}_5$  : Sector Acciones

$\mathcal{N}_6$  : Sector Divisas

$\mathcal{N}_7$  : Sector Deuda internacional

$\mathcal{N}_8$  : Fiduciarias

$\mathcal{N}_9$  : Índices

Con el fin de establecer un modelo general, en el cual se puedan utilizar las cuatro medidas de riesgo presentadas en el capítulo 3, definimos:

$\phi(\bar{x})$  : Medida de riesgo

Ahora se define el modelo:

Variables:

$\bar{x}$  : portafolio

$x_i$  : Proporción del portafolio invertida en el activo  $i$

Parámetros:

$r_i$  : Rentabilidad promedio del activo  $i$

$R^*$  : Rentabilidad mínima del portafolio

$LL_j$  : Límites legales

$DP$  : Límite inversiones en deuda pública

$RV$  : Límite inversiones renta variable

$ME$  : Límite inversiones en moneda extranjera

$LI_j$  : Límites internos

Función Objetivo:  $\min \phi(X)$  **Ecuación 24**

Sujeto a:  $\sum_{i \in \mathcal{N}} r_i x_i \geq R^*$  **Ecuación 25**

$\sum_{i \in \mathcal{N}} x_i = 1$  **Ecuación 26**

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_j} x_i \leq LL_j \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, 9 \quad \text{Ecuación 27}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2} x_i \leq DP \quad \text{Ecuación 28}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_5 \cup \mathcal{N}_8} x_i \leq RV \quad \text{Ecuación 29}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{N}_6 \cup \mathcal{N}_7 \cup \mathcal{N}_9} x_i \leq ME \quad \text{Ecuación 30}$$

$$x_i \leq LI_i \quad \text{para } j \in \mathcal{N}_5 \quad \text{Ecuación 31}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \text{para } i \in \mathcal{N} \quad \text{Ecuación 32}$$

Donde, la ecuación 24 es la función objetivo, que busca minimizar el riesgo. La expresión que aparece actualmente debe ser reemplazada por las medidas de riesgo de acuerdo al modelo que esté bajo análisis. La ecuación 15 exige que el portafolio genere una rentabilidad igual o mayor a una rentabilidad establecida  $R^*$ . En la composición de portafolios se debe construir una frontera eficiente en la cual hay un portafolio con mínimo riesgo para cada rentabilidad posible, generalmente a mayor rentabilidad exigida se debe asumir más riesgo. La ecuación 26 exige que la totalidad del capital sea invertido en algún activo. Estas tres ecuaciones junto con la ecuación 32 son las ecuaciones básicas de los modelos de composición de portafolios.



Sin embargo, en el caso de los fondos de pensiones es necesario incluir algunas restricciones adicionales. Primero, tenemos la ecuación 27, esta ecuación exige que se cumplan los límites individuales por tipo de activo. Por ejemplo, exige que en fiduciarias la inversión sea máxima de 5%. Luego está la ecuación 28, la cual restringe la inversión en activos emitidos por La Nación o entidades del Estado. Como los Yankees son títulos emitidos por el gobierno de Colombia, aunque estén denominados en otra moneda, deben ir incluidos en este límite. La ecuación 29 restringe la inversión en renta variable, es decir inversión en acciones, en fondos ordinarios y en fondos especiales<sup>11</sup>. Por último, con respecto a las restricciones legales, está la ecuación 30, la cual restringe la exposición a moneda extranjera.

Además de las restricciones impuestas por la legislación, están las restricciones que generan las políticas internas. El departamento de riesgo de cada fondo además de estar encargado de que se cumplan los aspectos legales, también hace un análisis de los papeles por separado y decide qué cupo se les asigna en el portafolio. El cupo se determina de acuerdo a factores como: liquidez de los papeles, riesgo de crédito del emisor, tipo de activo, entre otros aspectos. La restricción 31 corresponde a los límites internos establecidos para cada una de las acciones. Los papeles emitidos por las entidades vigiladas y no vigiladas por la SFC también tienen un cupo de inversión. Sin embargo, con las series históricas que se utilizaron en el estudio no es posible tenerlos en cuenta.

#### 4.3. Método para Solucionar el Problema de Composición de Portafolios

Con el modelo de la sección anterior y las series de datos, el objetivo ahora es encontrar los portafolios eficientes. Un portafolio es eficiente si para una rentabilidad  $R^*$  determinada no existe otro portafolio en el conjunto de posibles soluciones con un menor nivel de riesgo. Es importante probar diferentes niveles para  $R^*$ , esto da como resultado la frontera eficiente. Estas alternativas dan la posibilidad al inversionista de situarse en el punto que se sienta más cómodo de acuerdo a la rentabilidad alcanzada y

---

<sup>11</sup> En este estudio solo se tienen en cuenta las acciones y los fondos ordinarios

al riesgo que se está asumiendo. Cada inversionista tiene un perfil de riesgo diferente y por eso cada persona constituye su propio portafolio, lo ideal es que esté sobre la frontera eficiente para que sea óptimo.

#### 4.3.1. Programación del modelo

El modelo fue implementado en el software Xpress-MP de Dash Optimization bajo el Academic Partner Program suscrito con la Universidad de los Andes. Este es un software comercial especializado en desarrollo de modelos y algoritmos de optimización. El programa desarrollado cuenta con un ciclo que va incrementando la rentabilidad mínima. Para cada iteración el programa debe resolver el problema y obtener el portafolio de mínimo riesgo. Cuando el programa termina, el operador cuenta con 1,000 portafolios eficientes, los cuales conforman la frontera eficiente.

El problema que tiene como función objetivo la varianza, es un problema de programación cuadrática; para resolverlo es necesario utilizar librerías especiales en Xpress. En el estudio que estamos realizando el número de variables es relativamente pequeño. En este caso, el programa tomó en algunos casos menos tiempo que los problemas de programación lineal. Sin embargo, a medida que el número de variables y de restricciones aumenta, la complejidad crece a una tasa cada vez mayor.

Los otros tres problemas (desviación media absoluta, máxima pérdida y CVaR) requieren programación lineal. No obstante, estos modelos contienen un número muy grande de restricciones, debido a la linealización de la medida de riesgo. Los modelos Rentabilidad-Máxima Pérdida y Rentabilidad-CVaR tienen  $J$  (Número de escenarios) restricciones más que el modelo Rentabilidad-Varianza. Mientras, el modelo Rentabilidad-Desviación Media Absoluta tiene  $2*J$  (Número de escenarios) restricciones más que el modelo Rentabilidad-Varianza. Aunque estos modelos son más complejos, al incrementar el número de variables y de restricciones, el incremento en la complejidad no es tan grande como en el caso del modelo Rentabilidad-Varianza.

#### 4.4. Estructura del programa y flujo de información

La herramienta que se construyó utiliza varios programas, los cuales en varias ocasiones deben ser usados aparte. La información viene de dos sistemas de información: Bloomberg y la base de datos del fondo de pensiones. Luego, esta información dependiendo de la fuente, se guarda en un archivo de Excel. A través de una macro los datos son recolectados y el precio de todos los activos es calculado. Es necesario calcular los precios utilizando las metodologías explicadas en el capítulo 2, la información puede venir como tasas o parámetros.

Luego de tener la información en un único archivo, se utiliza Visual Basic de Excel para armar las bases de datos de acuerdo a las necesidades de cada modelo y se crean dos archivos de texto (el modelo Rentabilidad-Varianza es el único que necesita una base de datos con características diferentes). En la Ilustración 1 se muestran estos primeros pasos.

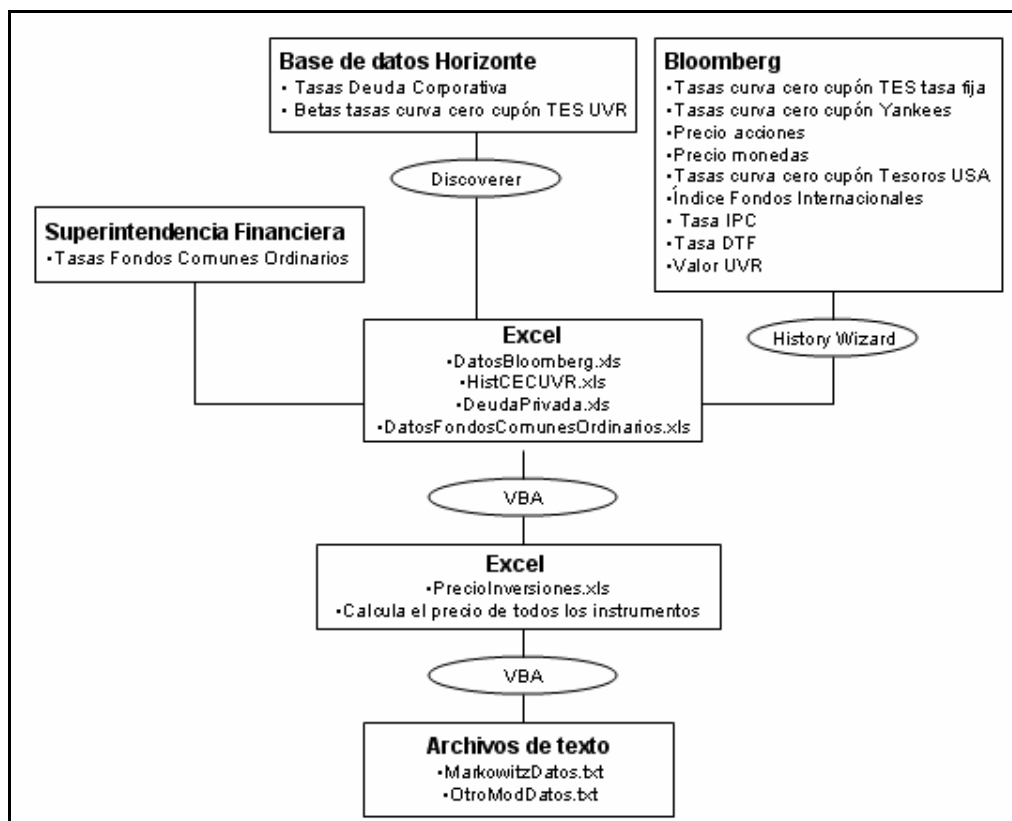
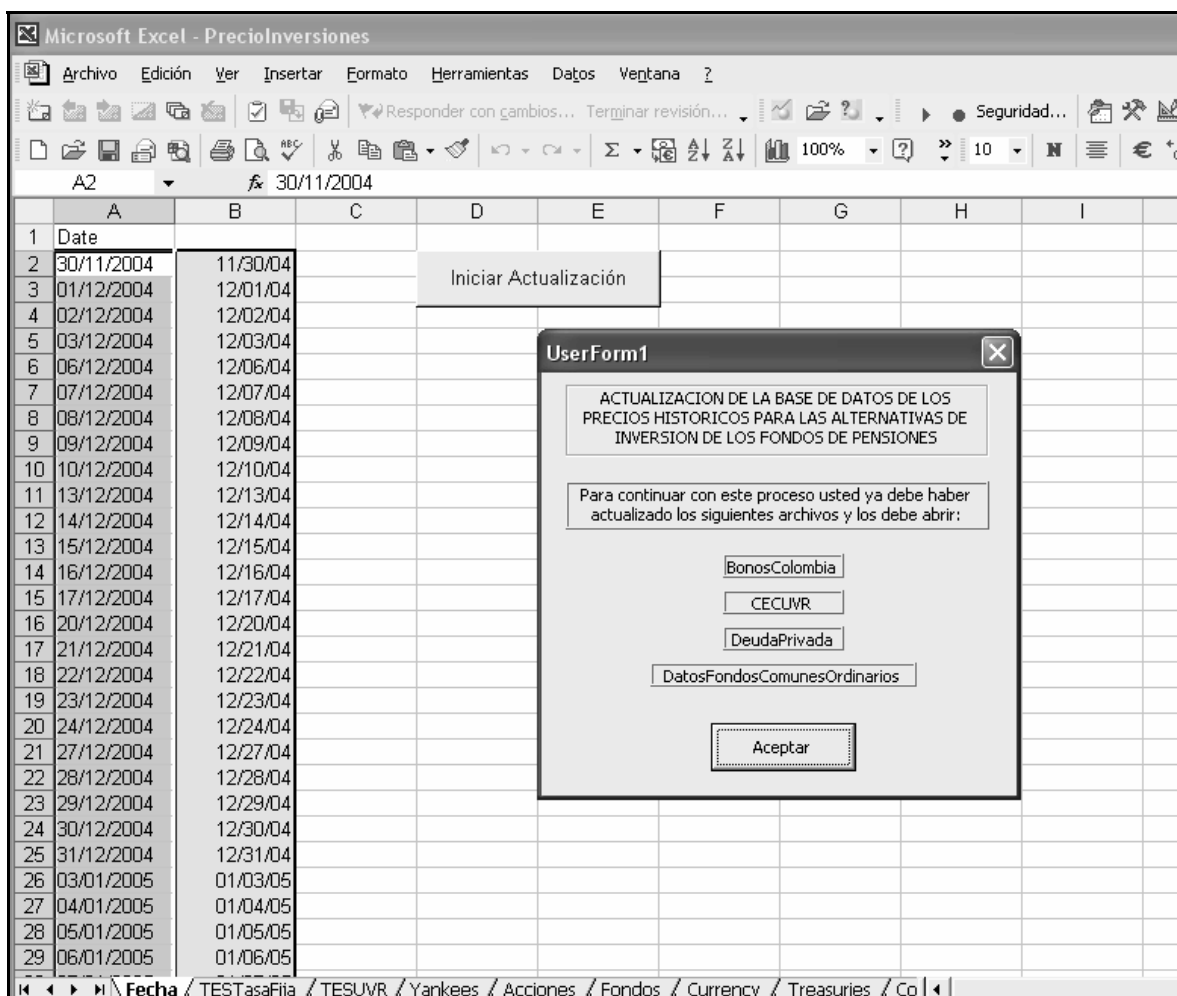


Ilustración 1. Proceso construcción bases de datos

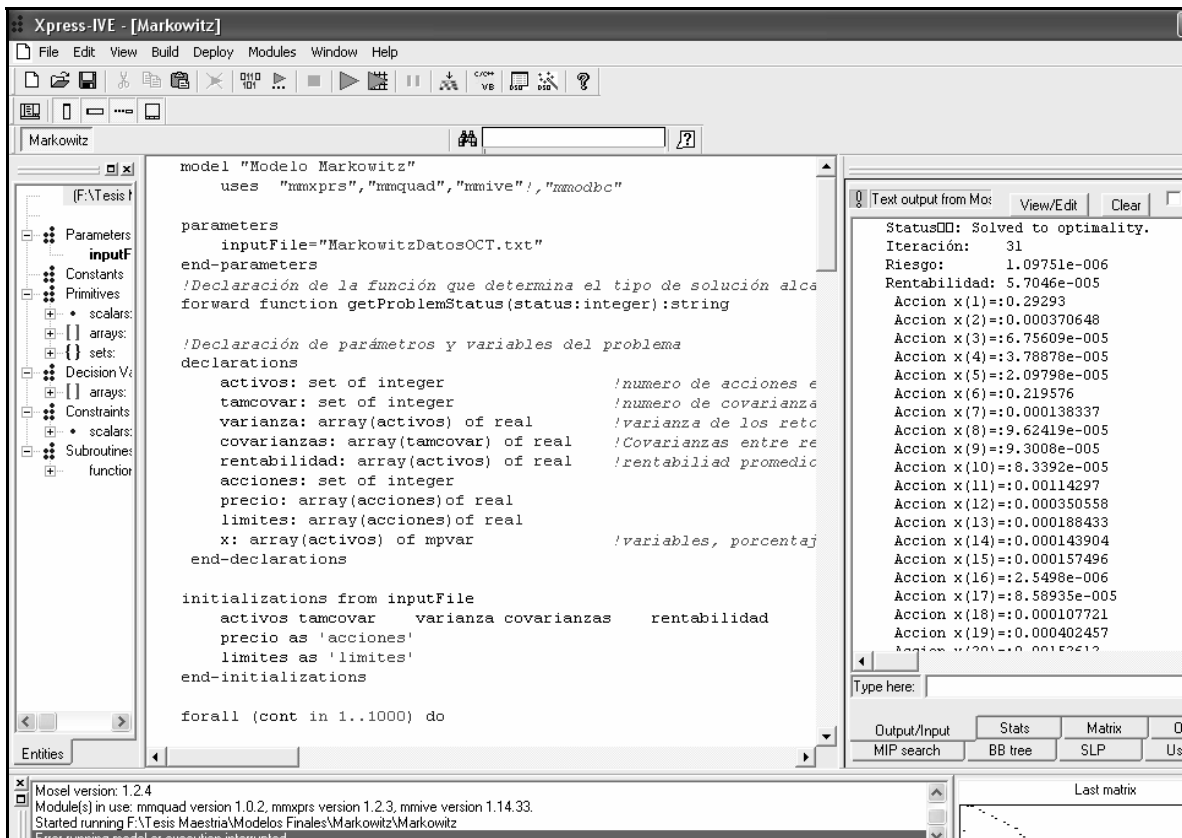
La pantalla que encontrará el usuario para armar las bases de datos en el archivo de Excel con nombre PrecioInversiones.xls se presenta en la Ilustración 2. El programa le pide al usuario mantener abiertos los archivos: DatosBloomberg.xls, HistCECUVR.xls, DeudaPrivada.xls, DatosFondosComunesOrdinarios.xls.



**Ilustración 2.** Pantalla archivo PrecioInversiones.xls

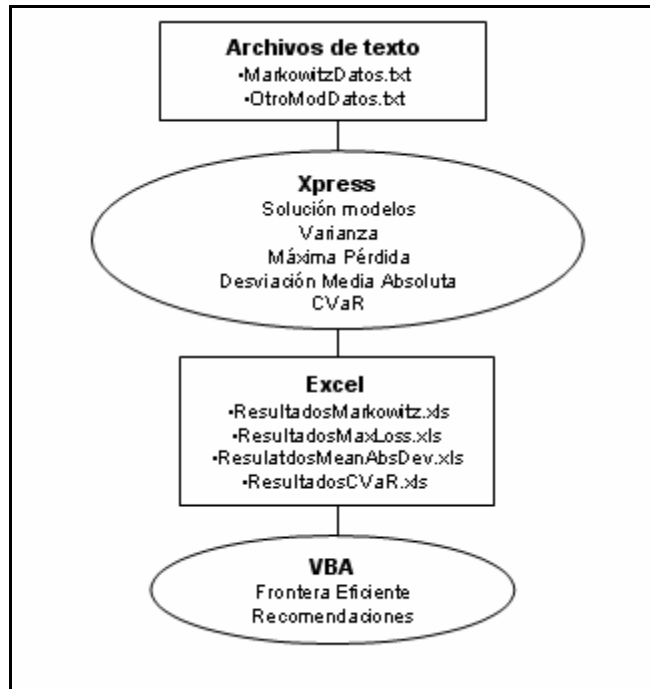
Al tener las bases de datos en formato texto se pueden resolver los problemas. En Xpress se programó un ciclo que va aumentando la rentabilidad mínima (parámetro del modelo) y que exige resolver el problema para cada una de estas rentabilidades. Al finalizar, Xpress arroja 1,000 portafolios eficientes, cada uno con un nivel de riesgo y

una rentabilidad. Para cada modelo se programa un archivo en Xpress. En la ilustración 3 se puede observar la pantalla de Xpress junto con los resultados que obtiene.



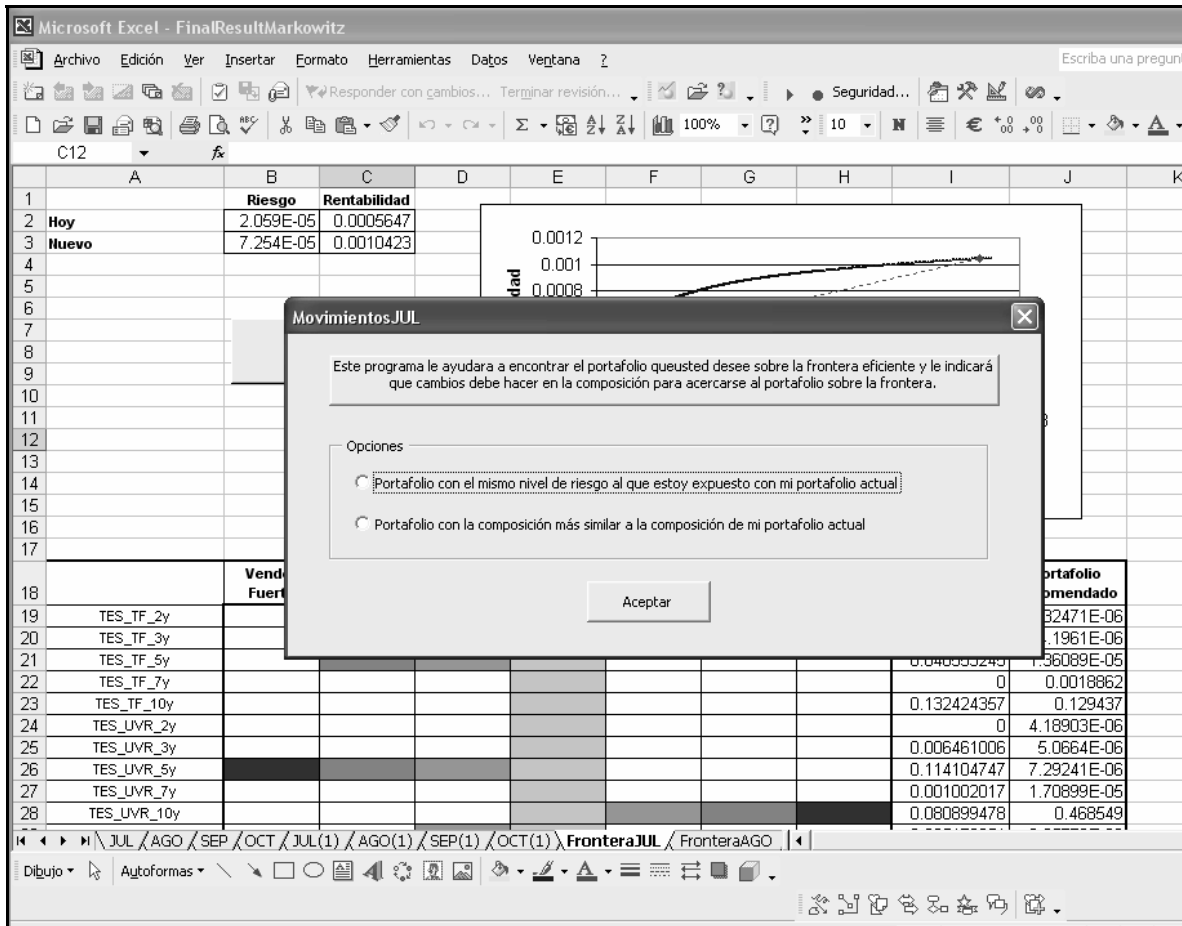
**Ilustración 3.** Pantalla programa y resultados en Xpress-MP

Finalmente, los datos se pasan a Excel. Con la ayuda de Visual Basic de Excel se grafica la frontera eficiente, se ubica el portafolio actual en el espacio de posibles soluciones y se generan una serie de sugerencias que le indicaran al administrador las decisiones de inversión que lo pueden acercar a la frontera eficiente, que pueden aumentar su rentabilidad y disminuir el riesgo. En la Ilustración 4 se presentan los últimos pasos del proceso.



**Ilustración 4.** Resolución del problema y sugerencias

En los diferentes archivos de resultados de Excel el usuario encontrará una pantalla, en la cual, puede seleccionar a que portafolio sobre la frontera eficiente se quiere acercar. Las dos opciones que existen son: el portafolio con el mismo nivel de riesgo sobre la frontera eficiente o el portafolio con la composición más similar a la composición del portafolio actual. En la Ilustración 5 se presenta la interfaz que encontrara el administrador.



**Ilustración 5.** Pantalla Interfaz de archivos de resultados

Cuando se habla del portafolio con la composición más similar a la composición del portafolio actual lo que se hizo fue minimizar la suma de los valores absolutos de las diferencias entre las inversiones en cada uno de los activos. Es decir.

$$\min_{1 \leq j \leq 1000} \left\{ \sum_{i=1}^N |x_i - y_{ji}| \right\} \quad \text{Ecuación 33}$$

- Donde:
- $x_i$  : Proporción actual del portafolio invertida en el activo i
  - $y_{ji}$  : Proporción del portafolio j invertida en el activo i
  - $N$  : Activos en el mercado

## 5. Resultados

### 5.1. Introducción

Esta sección se enfoca en el último paso del proceso. En las secciones que siguen se encuentran los resultados que arroja el programa. Se grafican las fronteras eficientes (FE) y se muestra la posición del portafolio actual. También se muestra la forma seleccionada para dar las sugerencias al administrador de capital. Este formato ya se presentó a los administradores del fondo y tuvo una buena impresión. Es un resultado fácil de entender y poner en práctica.

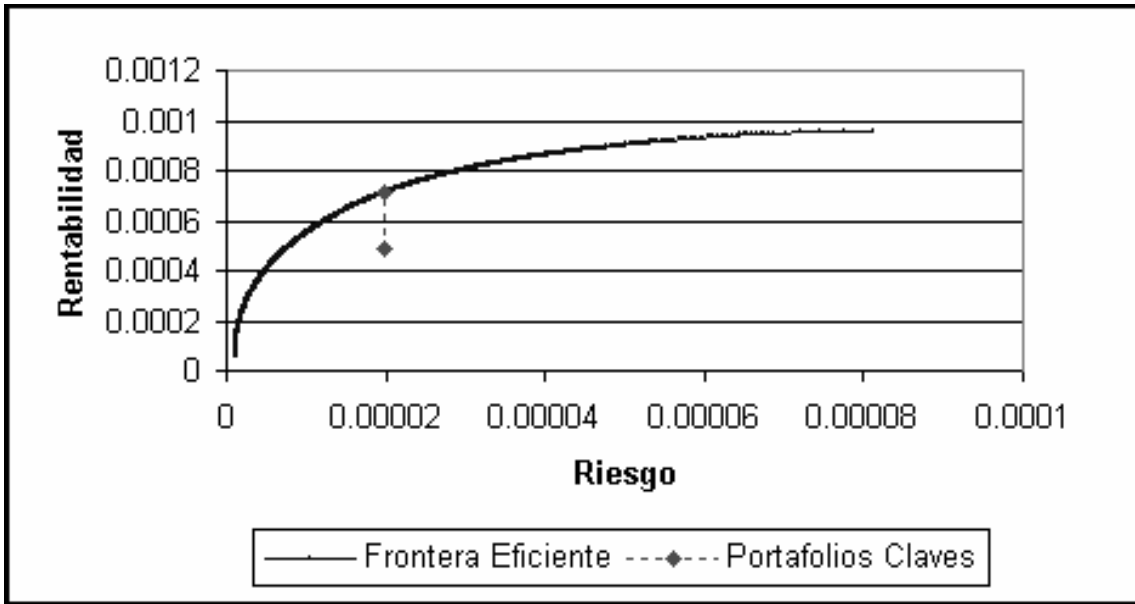
### 5.2. Fronteras Eficientes

La herramienta que se construyó grafica los resultados de Xpress, de esta forma se obtiene la frontera eficiente. Además, el programa sitúa el portafolio actual en el espacio de posibles soluciones, el administrador puede ver que tan lejos está de la frontera eficiente y puede decidir como proyectarse en ella. Con el fin de sugerirle al administrador algunas decisiones de inversión que lo acerquen a la frontera, el programa le da la alternativa al administrador para que escoja entre el portafolio que pertenece a la frontera eficiente y que tiene el mismo nivel de riesgo del actual o el portafolio que pertenece a la frontera eficiente y que, activo por activo, es más parecido al actual. En las secciones siguientes se presentan las gráficas que se obtienen para Octubre 31 de 2006.

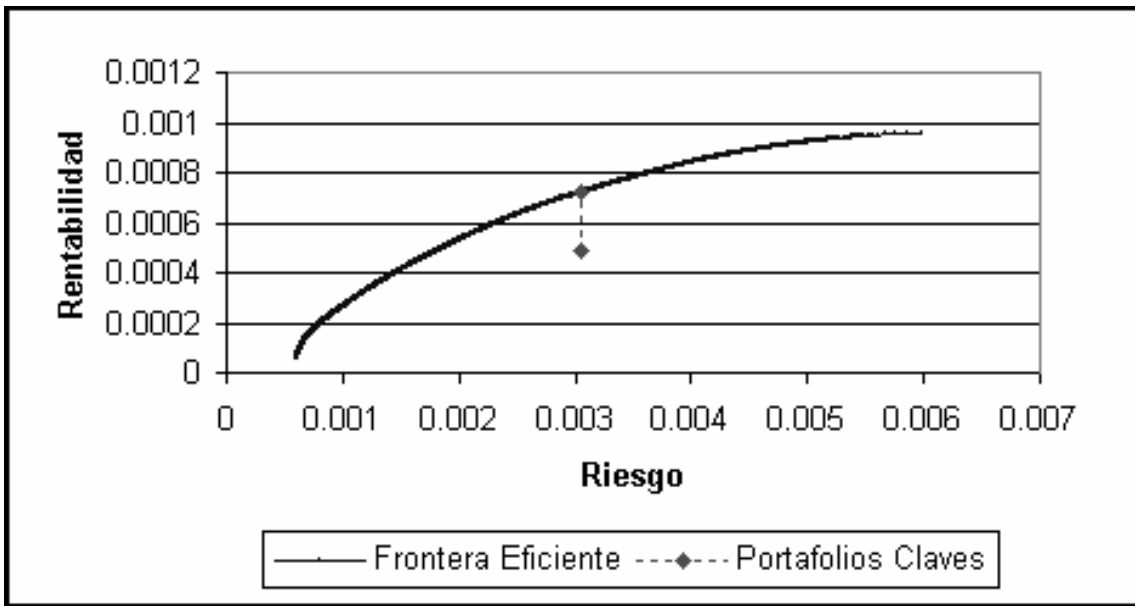
#### 5.2.1. FE para la búsqueda del portafolio con el mismo nivel de riesgo

A continuación se presentan las gráficas que arrojan los diferentes programas (cada programa utiliza una medida de riesgo diferente) cuando el administrador selecciona la opción de acercarse al portafolio sobre la frontera eficiente con el mismo nivel de riesgo.

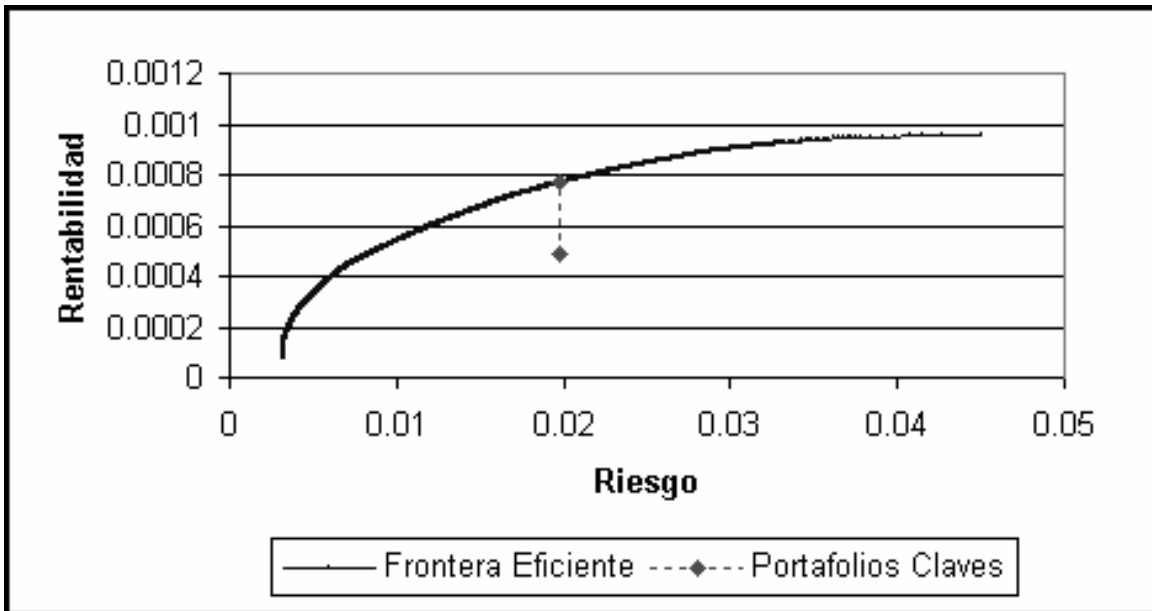




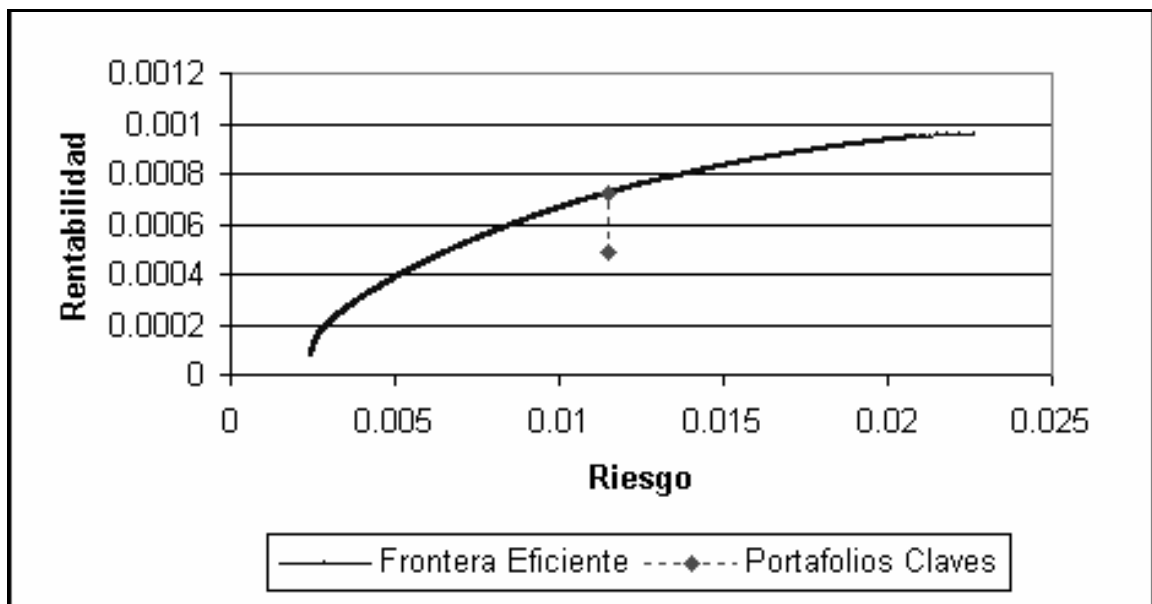
**Ilustración 6.** Frontera Eficiente e Portafolio Rentabilidad-Varianza



**Ilustración 7.** Frontera Eficiente e Portafolio Rentabilidad-Desviación Absoluta Media



**Ilustración 8.** Frontera Eficiente y Portafolio Rentabilidad-Máxima Pérdida

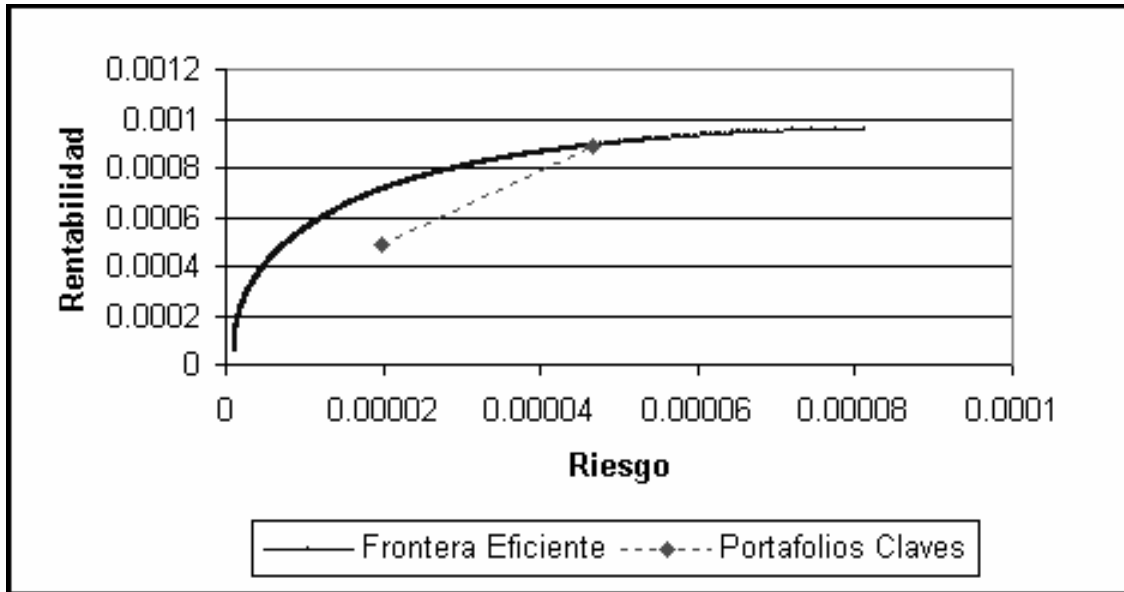


**Ilustración 9.** Frontera Eficiente y Portafolio Rentabilidad-CVaR

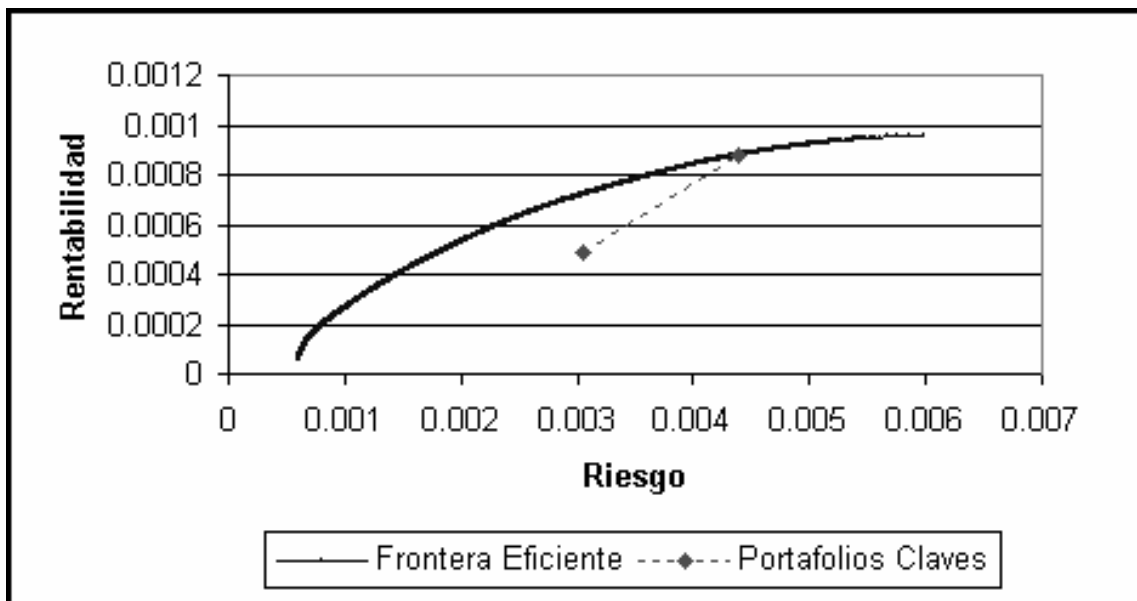
### 5.2.2. FE para la búsqueda del portafolio con la composición más similar

A continuación se presentan las gráficas que se obtienen cuando el administrador escoge la opción de acercarse al portafolio que tiene mayor similitud con el actual.

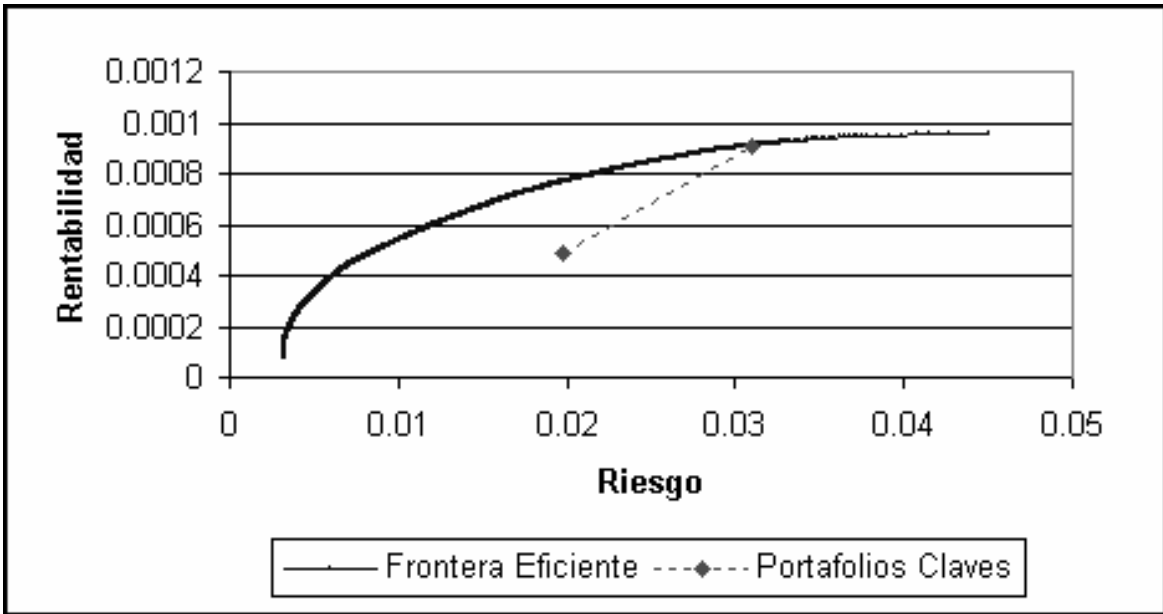
Se puede ver que los portafolios no tienen el mismo nivel de riesgo, en muchos casos el riesgo se incrementa al doble. En las pruebas que se llevaron a cabo durante la evaluación del programa, hubo ocasiones en las cuales el portafolio más similar tenía un menor nivel de riesgo, pero también generaba menor rentabilidad.



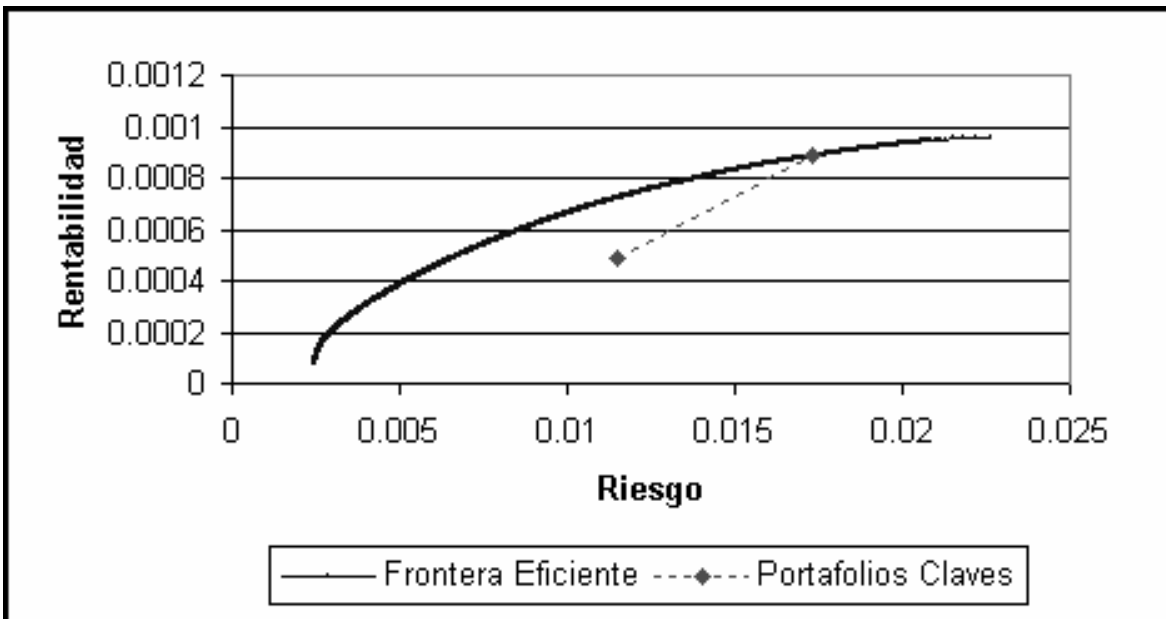
**Ilustración 10.** Frontera Efi ciente Portafolio Rentabilidad-Varianza



**Ilustración 11.** Frontera Efi ciente Portafolio Rentabilidad-Desviación Absoluta Media



**Ilustración 12.** Frontera Efi ciente Portafolio Rentabilidad-Máxima Pérdida



**Ilustración 13.** Frontera Eficiente Portafolio Rentabilidad-CVaR

### 5.3. Sugerencias

Buscando crear una herramienta que le sugiera al administrador las decisiones de inversión que debe tomar para acercarse al portafolio sobre la frontera eficiente, se hizo una programación en la cual a través de una escala con respecto a un eje y de acuerdo a la intensidad de los colores se le sugiere al administrador comprar, vender o permanecer con la misma proporción, estas sugerencias son por cada uno de los activos. En la Ilustración 14 se presenta un ejemplo del resultado que obtendrá el administrador al utilizar el programa.

	Vender Fuerte	Vender Moderado	Vender Suave	Permanecer	Comprar Suave	Comprar Moderado	Comprar Fuerte
TES_TF_2y							
TES_TF_3y							
TES_TF_5y							
TES_TF_7y							
TES_TF_10y							
TES_UVR_2y							
TES_UVR_3y							
TES_UVR_5y							
TES_UVR_7y							
TES_UVR_10y							
Yankees_2y							
Yankees_3y							
Yankees_5y							
Yankees_7y							
Yankees_10y							
PAZRIO CB Equity							
EXITO CB Equity							
BOGOTA CB Equity							
BCOLO CB Equity							
PFBCOLO CB Equity							
CARULL CB Equity							
CEMARGOS CB Equity							

CHOCOLA CB Equity							
COLINV CB Equity							
COLTEJ CB Equity							
PFCORCOL CB Equity							
CORFICOL CB Equity							
PVETB CB Equity							
AVAL CB Equity							
INTBOL CB Equity							
INVARGOS CB Equity							
ISA CB Equity							
MINEROS CB Equity							
SURAMIN CB Equity							
TABLEMA CB Equity							
FABRI CB Equity							
VALBAVA CB Equity							
VALSIME CB Equity							
MXWD Index							
Euro							
Libra							
Dólar							
Yen							
Treasuries_2y							
Treasuries_3y							
Treasuries_5y							
Treasuries_10y							
DTF_2y_Fin							
DTF_2y_Real							
DTF_3y_Fin							
DTF_3y_Real							
DTF_5y_Fin							
DTF_5y_Real							
DTF_7y_Fin							
DTF_7y_Real							
DTF_10y_Fin							
DTF_10y_Real							
IPC_2y_Fin							

IPC_2y_Real							
IPC_3y_Fin							
IPC_3y_Real							
IPC_5y_Fin							
IPC_5y_Real							
IPC_7y_Fin							
IPC_7y_Real							
IPC_10y_Fin							
IPC_10y_Real							
TF_2y							
TF_3y							
TF_5y							
TF_7y							
TF_10y							
Fiduciaías							

**Ilustración 14.** Ejemplo Sugerencias del Modelo

En este ejemplo, el programa le sugiere al administrador que venda los TES tasa fija con vencimientos a 2 y 5 años, que venda los TES UVR a 3, 5 y 10 años. Y que venda en una baja proporción los siguientes activos: yankees de 2 y 10 años, las acciones de Bancolombia, Inverargos y Suraminv, los títulos del sector privado del sector financiero con tasa DTF a 2 años, IPC a 2,3 y 5 años, del sector real los títulos con tasa IPC a 5 años, los títulos tasa fija del sector privado con vencimientos a 5 y 7 años. Finalmente sugiere una reducción en la participación en fondos comunes ordinarios.

Por otro lado, le sugiere al inversionista comprar TES tasa fija con vencimiento a 10 años, aumentar la inversión en fondos extranjeros, comprar títulos del sector privado financiero con tasa DTF a 7 años e IPC a 10 años, al igual que títulos del sector real con tasa IPC a 10 años. También, le sugiere aumentar la participación en menor proporción en los TES tasa fija a 7 años, las acciones del Banco de Bogota, de Bancolombia preferencial y de Colinvers, y en los títulos del sector real con tasa IPC a 7 años.

En el resto de activos sugiere permanecer en la misma proporción actual. La razón para usar una escala de este tipo fue lograr un resultado que fuese amistoso para el usuario, que le sugiriera un camino, sin necesidad de imponerle un número específico. En la toma de decisiones de inversión hay una serie de factores que se deben tener en cuenta y que no pueden ser incluidos en el programa, entre estos factores está la liquidez de los papeles, expectativas, noticias o eventos que se presentan en puntos específicos del tiempo (reuniones de la FED<sup>12</sup>), entre otras cosas. Esta herramienta es un instrumento que complementa la experiencia y expectativas del administrador.

Finalmente, el programa también arroja las proporciones del portafolio actual y del portafolio sugerido. En el caso de las acciones en las cuales los posibles movimientos son muy pequeños ver estas proporciones es de gran utilidad. En la Tabla 2 se muestra un ejemplo.

	Portafolio Hoy	Portafolio Recomendado
TES_TF_2y	6.80809%	0.00000%
TES_TF_3y	0.00000%	0.00000%
TES_TF_5y	7.45909%	0.00000%
TES_TF_7y	0.00000%	3.46116%
TES_TF_10y	9.69489%	16.01870%
TES_UVR_2y	0.00000%	0.00000%
TES_UVR_3y	8.27076%	0.00000%
TES_UVR_5y	5.39935%	0.00000%
TES_UVR_7y	0.07854%	0.00000%
TES_UVR_10y	9.95985%	0.66645%
Yankees_2y	2.09253%	0.00000%
Yankees_3y	0.44718%	0.00000%
Yankees_5y	0.26603%	0.00000%
Yankees_7y	0.00000%	0.00000%
Yankees_10y	1.43462%	0.00000%
PAZRIO CB Equity	0.00000%	0.00190%
EXITO CB Equity	0.23957%	0.79733%

<sup>12</sup> Reserva Federal de EE.UU.



BOGOTA CB Equity	0.22582%	2.00811%
BCOLO CB Equity	2.04306%	0.00000%
PFBCOLO CB Equity	0.96553%	4.10820%
CARULL CB Equity	0.00000%	0.35252%
CEMARGOS CB Equity	1.43191%	1.47467%
CHOCOLA CB Equity	1.32663%	1.94557%
COLINV CB Equity	0.00000%	1.53249%
COLTEJ CB Equity	0.00000%	0.01086%
PFCORCOL CB Equity	0.12387%	0.62223%
CORFICOL CB Equity	0.51059%	0.62436%
PVETB CB Equity	0.19446%	0.00000%
AVAL CB Equity	0.51044%	0.68506%
INTBOL CB Equity	0.00000%	0.00000%
INVARGOS CB Equity	1.42524%	0.00000%
ISA CB Equity	1.24706%	1.54375%
MINEROS CB Equity	0.01123%	0.14368%
SURAMIN CB Equity	1.87802%	0.00000%
TABLEMA CB Equity	0.00000%	0.00664%
FABRI CB Equity	0.03132%	0.07375%
VALBAVA CB Equity	0.00000%	0.00000%
VALSIME CB Equity	0.00000%	0.00000%
MXWD Index	4.64477%	20.00000%
Euro	0.00000%	0.00000%
Libra	0.00000%	0.00000%
Dólar	0.83285%	0.00000%
Yen	0.00000%	0.00000%
Treasuries_2y	0.62264%	0.00000%
Treasuries_3y	0.89860%	0.00000%
Treasuries_5y	0.43654%	0.00000%
Treasuries_10y	0.50544%	0.00000%
DTF_2y_Fin	3.57035%	0.00000%
DTF_2y_Real	0.86251%	0.00000%
DTF_3y_Fin	0.39433%	0.00000%
DTF_3y_Real	0.01262%	0.00000%
DTF_5y_Fin	0.11592%	0.00000%
DTF_5y_Real	0.00000%	0.00000%

DTF_7y_Fin	0.52166%	13.52460%
DTF_7y_Real	0.00000%	0.00000%
DTF_10y_Fin	0.00000%	0.00000%
DTF_10y_Real	0.00000%	0.00000%
IPC_2y_Fin	1.35436%	0.00000%
IPC_2y_Real	0.81901%	0.00000%
IPC_3y_Fin	1.17494%	0.00000%
IPC_3y_Real	0.51573%	0.00000%
IPC_5y_Fin	1.69472%	0.00000%
IPC_5y_Real	1.52774%	0.00000%
IPC_7y_Fin	0.70591%	0.00000%
IPC_7y_Real	1.92728%	5.34671%
IPC_10y_Fin	0.55498%	16.47540%
IPC_10y_Real	3.75688%	8.57582%
TF_2y	0.59013%	0.00000%
TF_3y	0.00000%	0.00000%
TF_5y	2.26216%	0.00000%
TF_7y	3.07139%	0.00000%
TF_10y	0.63076%	0.00000%
Fiduciarias	1.92012%	0.00000%

**Tabla 2** Proporciones del portafolio actual y del portafolio recomendado

Este resultado aunque no es amistoso, y trata de imponer una única proporción para cada activo, de acuerdo a la solicitud de los administradores del fondo de pensiones, es necesario. Hay activos para los cuales un pequeño cambio es significativo y si no se imprimen las proporciones no hay forma que los administradores se den cuenta de estas diferencias.

## 6. Evaluación

### 6.1. Pruebas del Modelo y del Método de Solución en el Mercado Financiero Colombia

Para probar los resultados que se obtienen al conformar el portafolio de acuerdo a lo sugerido por los programas realizados, se llevaron a cabo pruebas reales. Se tomaron datos históricos para las siguientes fechas (DD/MM/AA): 31/07/06, 31/08/06, 30/09/06 y 31/10/06. Luego se encontraron los portafolios que cada uno de los programas sugería para cada una de estas fechas, finalmente se comparó la rentabilidad que obtuvieron los portafolios sugeridos por los programas contra el portafolio que conformaron los administradores para esa misma fecha, durante el mes inmediatamente siguiente. En esta sección mostraremos los resultados que se obtuvieron.

	<b>Actual</b>	<b>CVaR</b>	<b>Máxima Pérdida</b>	<b>Desviación Media Absoluta</b>	<b>Varianza</b>
Rentabilidad Jul-Ago	0.015260566	0.024177326	0.031160553	0.020934251	0.019899191
Rentabilidad Ago-Sep	-0.009202331	-0.064224252	-0.06602065	-0.037643285	-0.046202209
Rentabilidad Sep-Oct	0.02075496	0.034328103	0.034505366	0.040953034	0.034587913
Rentabilidad Oct-Nov	0.006557964	0.01673663	0.008544359	0.015241686	0.017247891

**Tabla 3.** Rentabilidades para portafolio actual y portafolios con el mismo nivel de riesgo

	<b>Actual</b>	<b>CVaR</b>	<b>Máxima Pérdida</b>	<b>Desviación Media Absoluta</b>	<b>Varianza</b>
Rentabilidad Jul-Ago	0.015260566	0.024999958	0.006236513	0.038713222	0.036269162
Rentabilidad Ago-Sep	-0.009202331	-0.069409438	-0.063552135	-0.044783159	-0.053146911
Rentabilidad Sep-Oct	0.02075496	0.03472749	0.045050787	0.040404512	0.038151373
Rentabilidad Oct-Nov	0.006557964	0.011024985	0.011549092	0.011223612	0.013500794

**Tabla 4.** Rentabilidades para portafolio actual y portafolios con la composición más similar al actual

La tabla 3 muestra los resultados de los portafolios con el mismo nivel de riesgo del portafolio actual. Todos los modelos presentan mejores resultados, con respecto al portafolio actual, en 3 de 4 casos. Sin embargo, si se observan las rentabilidades alcanzadas a partir del 31 de Agosto de 2006 hasta el 30 de Septiembre de 2006, vemos que las pérdidas son significativas. La razón de esta pérdida está asociada a la sugerencia que hacen todos los modelos para la compra de títulos del sector financiero con tasa DTF a 7 años. Estos títulos no son muy líquidos, razón por la cual son muy volátiles y un cambio pequeño en el precio puede ocasionar grandes pérdidas. En este punto, es donde los conocimientos y la experiencia del administrador son importantes, el administrador no va a seguir ciegamente las recomendaciones del programa y menos si ve que el programa le sugiere una inversión tan grande en un activo ilíquido.

Los resultados presentados en la tabla 4 corresponden a los portafolios más semejantes al actual. Los resultados son prácticamente los mismos. Con excepción del modelo de Máxima Pérdida, los resultados de los modelos son mejores en 3 de 4 casos. Al igual que en la tabla 3, en el periodo Agosto – Septiembre el portafolio actual genera menores pérdidas que los portafolios propuestos por los modelos.

Al observar los resultados, en general, se ve que el programa le puede dar recomendaciones muy valiosas a quien toma las decisiones. En conclusión, el administrador va a estar en condición de aumentar la rentabilidad de los pensionados.

## 7. Conclusiones

El desarrollo de este estudio implicó investigación y desarrollo en varios aspectos. Para armar las bases de datos fue necesario conocer acerca de la regulación a la cual están sujetos los fondos de pensiones, conocer acerca de los instrumentos financieros que se transan en el mercado colombiano, conocer sus características y definir cuales de ellos se debían tener en cuenta en el análisis. Después, buscar la información histórica del comportamiento de los precios de estos activos, buscar qué fuentes proporcionaban la información y cuáles de ellas lo hacían de forma más eficiente, definir como se debían construir las series y si todas ellas eran coherentes entre si. Después de conocer la forma en que se iba a utilizar la información, fue necesario hacerlo realidad. La construcción de las series de precios fue complicada por la forma como salía la información de las bases de datos, gran parte de la información se descargaba como tasas, como el caso de los TES tasa fija, mientras que otra venía como parámetros, como es el caso de los TES UVR. Para lograr coherencia fue necesario conocer las metodologías de valoración que propone la BVC para cada uno de los papeles y desarrollar un aplicativo que valorara todos los papeles.

Después de la conformación de las bases de datos, la investigación realizada con respecto a las medidas de riesgo fue importante. Se definieron las propiedades de cada una de las medidas. La gran diferencia está en el supuesto de normalidad multivariada, la Varianza y la Desviación Media Absoluta exigen este supuesto. Cuando se evaluó esto en el apéndice A, se obtuvieron resultados que permiten llegar a la conclusión de la inexistencia de normalidad multivariada. De acuerdo a este resultado lo correcto es descartar las medidas que exigen este supuesto y de esta forma evitar pérdidas inesperadas.

Si uno se enfoca en el tiempo que tomaron los programas para llegar a la respuesta final, se presenta una sorpresa. En este estudio el modelo que utilizaba programación cuadrática tomaba en general el mismo o menor tiempo para llegar a una solución. Lo que se puede concluir al respecto es que el número de restricciones en un problema de este tamaño tiene gran influencia. En el capítulo 3 se mostró que el modelo Rentabilidad-CVaR

y Rentabilidad-Máxima Pérdida tenían una restricción adicional por cada escenario, mientras que el modelo Rentabilidad-Desviación Media Absoluta contiene 2 restricciones más por cada escenario. Sin embargo, se espera que a medida que el número de variables crezca el modelo de programación cuadrática se vuelva más complejo de resolver.

Finalmente, cuando se llevaron a cabo las pruebas de cada uno de los modelos y se obtuvieron los resultados se pudo ver lo valiosos que son los modelos y lo útiles que serán en el proceso de toma de decisiones. En el 75% de los casos los portafolios encontrados por los modelos de optimización obtenían mejores resultados en cuanto a rentabilidad cuando eran comparados con el portafolio constituido por los administradores para esa fecha. Si se observaban las proporciones sugeridas para cada uno de los activos, se encontraba que las sugerencias de los diferentes modelos eran muy parecidas. La similitud de los portafolios propuestos es evidente en el escenario (Agosto-Septiembre) para el cual todos los portafolios propuestos presentan peores resultados que el portafolio compuesto por los administradores.

En el escenario que se presentaron los resultados negativos queda claro que los resultados del modelo por si solo no son precisos y que el aporte del administrador es muy valioso. Los modelos le sugerían al administrador que invirtiera el 30% del capital en un grupo de activos que es muy ilíquido, el cambio negativo en el precio de este activo llevo a unas pérdidas significativas durante ese periodo de tiempo. Sin embargo, por los conocimientos del administrador, él se puede dar cuenta que no es una sugerencia que debe seguir al pie de la letra y de esta forma puede evitar esas perdidas inesperadas.

Como producto final de este proyecto el fondo de pensiones queda con una herramienta que ha demostrado alcanzar buenos resultados. Este se convertirá en un instrumento muy valioso en el proceso de toma de decisiones de inversión, un instrumento que le permitirá al administrador tomar decisiones que lo acerquen a los portafolios eficientes y que ayudará en la obtención de mayores rentabilidades para los pensionados. De acuerdo a la dirección en la cual va el mercado de valores en Colombia se viene moviendo, cada día tiene más

participantes y una mayor liquidez, una herramienta de este tipo es cada día más útil y más precisa.

## 8. Bibliografía

- [1] ACERBI C., TASCHE D. (2002) On the Coherence of Expected Shortfall
- [2] ANDERSEN J.V., SORNETTE D. (1999) Have your Cake and eat it too: Increasing Returns while Lowering Large Risks.
- [3] BENATI S., RIZZI R. (2005) A Mixed Integer Linear Programming Formulation of the Optimal Mean/Value at Risk Portfolio Problem
- [4] COMMITTEE OF CHIEF RISK OFFICERS. (2002) Valuation and Risk Metrics.
- [5] CORAZZA M., FAVARETTO D. (2006) On the Existence of Solutions to the Quadratic mixed-Integer Mean-Variance Portfolio Selection Problem
- [6] GILLI M., KËLLEZI E. (2001) A Global Optimization Heuristic for Portfolio Choice with VaR and Expected Shortfall
- [7] JANSEN D., KOEDIJK K., DE VRIES C. (2000) Portfolio Selection with Limited Downside Risk
- [8] KIBZUN A., KUZNETSOV E. (2005) Analysis of Criteria VaR and CVaR
- [9] KONNO H., YAMAZAKI H. (1991) Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokio Stock Market
- [10] KROKHMAL P., PALMQUIST J., URYASEV S. (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints
- [11] KROKHMAL P. (2003) Risk Management Techniques for Decision Making in Highly Uncertain Environments



- [12] LI D., SUN X., WANG J. (2006) Optimal Lot Solution to Cardinality Constrained Mean-Variance Formulation for Portfolio Selection. *Mathematical Finance*, Vol 16, No. 1, 83-101.
  
- [13] LO. A. (2001) Risk Management for Hedge Funds: Introduction and Overview. *Financial Analysts Journal*, Nov/Dec 2001, 57, 6, 16-33.
  
- [14] MARKOWITZ H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, Vol 7, No. 1, 77-91.
  
- [15] PAFKA S., KONDOR I. (2001) Evaluating the RiskMetrics Methodology in Measuring Volatility abs Value-at\_Risk in financial Markets. *Physica A*, 299, 305-310.
  
- [16] ROCKAFELLAR R., URYASEV S. (1999) Optimization of Conditional Value-at-Risk, Working paper, 1-26.
  
- [17] ROCKAFELLAR R., URYASEV S. (2000) Optimization of Conditional Value-at-Risk, *Journal of Risk*, Vol. 2, Number 3, 21-41.
  
- [18] ROCKAFELLAR R., URYASEV S. (2002) Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions, *Journal of Banking and Finance*, 26, 1443-1471.
  
- [19] ROSENBERG J., SCHUERMANN T. (2006) a General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat-Tailed Risks. *Journal of Financial Economics*, 79, 569-614.
  
- [20] VOIT J. (2003) From Brownian Motion to Operational Risk: Statistical Physics and Financial Markets. *Physica A*, 321, 286-299.

- [21] SZEGÖ G. (2005) Measures of Risk. *European Journal of Operations Research*, 163, 5-19.
- [22] URYASEV S. (2000) Conditional Value-at-Risk: Optimization and Algorithms and Applications. *Financial Engineering News*, Issue 14, 1-6.

## 9. Apéndice A

Los modelos que utilizan como medida de riesgo la varianza o la desviación media absoluta funcionan bajo el supuesto de normalidad multivariada. Szegö (2005) muestra ejemplos de variables financieras que no siguen una distribución normal. Cuando no se tiene en cuenta que este supuesto no se cumple y se utilizan estas medidas de riesgo se pueden obtener pérdidas de gran magnitud. Szegö (2005) muestra la existencia de colas anchas del lado izquierdo, lo que lleva a retornos negativos de gran magnitud con una probabilidad más alta de la esperada. Para probar la existencia de normalidad multivariada se llevaron a cabo pruebas en SAS. Las pruebas se muestran en la Ilustración 15.

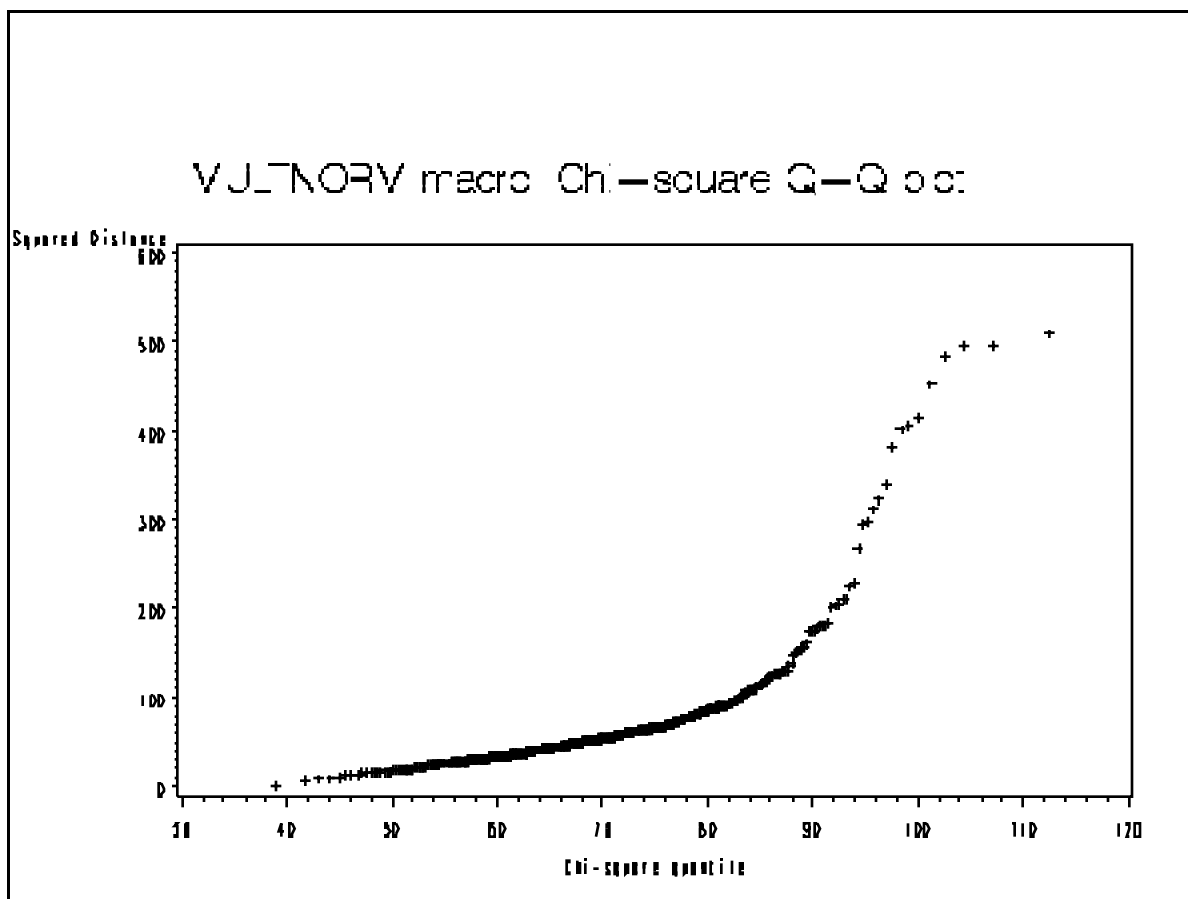
MULTNORM macro: Univariate and Multivariate Normality Tests			
The MODEL Procedure			
<b>Normality Test</b>			
Equation	Test Statistic	Value	Prob
x1	Shapiro-Wilk W	0.83	<.0001
x2	Shapiro-Wilk W	0.83	<.0001
x3	Shapiro-Wilk W	0.84	<.0001
x4	Shapiro-Wilk W	0.88	<.0001
x5	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x6	Shapiro-Wilk W	0.93	<.0001
x7	Shapiro-Wilk W	0.91	<.0001
x8	Shapiro-Wilk W	0.89	<.0001
x9	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x10	Shapiro-Wilk W	0.93	<.0001
x11	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x12	Shapiro-Wilk W	0.93	<.0001
x13	Shapiro-Wilk W	0.96	<.0001
x14	Shapiro-Wilk W	0.98	0.0203
x15	Shapiro-Wilk W	0.99	0.7985
x16	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x17	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x18	Shapiro-Wilk W	0.85	<.0001
x19	Shapiro-Wilk W	0.89	<.0001
x20	Shapiro-Wilk W	0.96	<.0001
x21	Shapiro-Wilk W	0.73	<.0001
x22	Shapiro-Wilk W	0.88	<.0001
x23	Shapiro-Wilk W	0.90	<.0001
x24	Shapiro-Wilk W	0.85	<.0001
x25	Shapiro-Wilk W	0.81	<.0001
x26	Shapiro-Wilk W	0.84	<.0001
x27	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x28	Shapiro-Wilk W	0.89	<.0001

x29	Shapiro-Wilk W	0.89	<.0001
x30	Shapiro-Wilk W	0.79	<.0001
x31	Shapiro-Wilk W	0.88	<.0001
x32	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x33	Shapiro-Wilk W	0.84	<.0001
x34	Shapiro-Wilk W	0.87	<.0001
x35	Shapiro-Wilk W	0.90	<.0001
x36	Shapiro-Wilk W	0.92	<.0001
x37	Shapiro-Wilk W	0.91	<.0001
x38	Shapiro-Wilk W	0.51	<.0001
x39	Shapiro-Wilk W	0.99	0.7343
x40	Shapiro-Wilk W	0.98	0.0144
x41	Shapiro-Wilk W	0.98	0.1249
x42	Shapiro-Wilk W	0.89	<.0001
x43	Shapiro-Wilk W	0.98	0.0171
x44	Shapiro-Wilk W	0.89	<.0001
x45	Shapiro-Wilk W	0.90	<.0001
x46	Shapiro-Wilk W	0.93	<.0001
x47	Shapiro-Wilk W	0.97	0.0006
x48	Shapiro-Wilk W	0.26	<.0001
x49	Shapiro-Wilk W	0.28	<.0001
x50	Shapiro-Wilk W	0.44	<.0001
x51	Shapiro-Wilk W	0.44	<.0001
x52	Shapiro-Wilk W	0.36	<.0001
x53	Shapiro-Wilk W	0.36	<.0001
x54	Shapiro-Wilk W	0.38	<.0001
x55	Shapiro-Wilk W	0.52	<.0001
x56	Shapiro-Wilk W	0.54	<.0001
x57	Shapiro-Wilk W	0.45	<.0001
x58	Shapiro-Wilk W	0.22	<.0001
x59	Shapiro-Wilk W	0.35	<.0001
x60	Shapiro-Wilk W	0.26	<.0001
x61	Shapiro-Wilk W	0.48	<.0001
x62	Shapiro-Wilk W	0.22	<.0001
x63	Shapiro-Wilk W	0.30	<.0001
x64	Shapiro-Wilk W	0.22	<.0001
x65	Shapiro-Wilk W	0.41	<.0001
x66	Shapiro-Wilk W	0.34	<.0001
x67	Shapiro-Wilk W	0.52	<.0001
x68	Shapiro-Wilk W	0.62	<.0001
x69	Shapiro-Wilk W	0.68	<.0001
x70	Shapiro-Wilk W	0.69	<.0001
System	Mardia Skewness	409E3	<.0001
	Mardia Kurtosis	507.2	<.0001
	Henze-Zirkler T	678E4	<.0001

**Ilustración 15.** Resultados SAS para las pruebas de normalidad multivariada

Tres variables tuvieron que ser omitidas de las pruebas por problemas con la macro de SAS. Según las pruebas de normalidad univariada en más del 95% de los casos podemos rechazar la hipótesis de normalidad con un nivel de confianza del 95%. Con este resultado

ya se puede concluir la inexistencia de normalidad multivariada (uno de los requisitos para la existencia de normalidad multivariada, es que todas la variables, por separado, sigan una distribución normal). Los estadísticos correspondientes al sistema corroboran lo anterior, todos rechazan la existencia de normalidad multivariada. Finalmente, en la Ilustración 16 se presenta el Q-Q plot de la distribución multivariada, es claro que no se presenta una recta, (las variables normales se identifican cuando se presenta una recta diagonal).



**Ilustración 16.** Q-Q plot, resultados pruebas SAS para normalidad multivariada