

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Producción de Arena en la Explotación de Petróleo

por

Ing. Carlos Eduardo Espinosa Pineda

Asesor

Dr. Arcesio Lizcano Ph.D.

Universidad de los Andes

Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental

Magíster en Ingeniería Civil

Grupo de Investigación en Geotécnia

2007

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Conceptos generales, antecedentes y motivación	1
1.1.1. Yacimientos de petróleo	1
1.1.1.1. Yacimientos de petróleo pesado	1
1.1.1.2. Yacimientos de petróleo liviano	3
1.1.2. Principio del esfuerzo efectivo	4
1.1.3. Comportamiento mecánico de un yacimiento	4
1.2. Motivación	5
1.3. Objetivos de la investigación	6
2. Estado del Conocimiento	7
2.1. Física de la producción de arena	8
2.2. Clases de producción de arena	9
2.3. Estados del proceso de erosión en un material granular saturado	10
2.4. Modelo acoplado de erosión y análisis de Estabilidad	11
3. Modelo de Erosión de Producción de Arena	13
3.1. Introducción	13
3.2. Definiciones y suposiciones	15
3.3. Medio de tres fases ó trifásico	16
3.3.1. Velocidad	19
3.3.2. Flujo específico relativo	21
3.3.3. Balance de masa	23
3.3.3.1. Ecuación de balance de masa de la fase sólida	24
3.3.3.2. Ecuación de balance de masa de la fase de partículas sólidas en suspensión en el fluido	25
3.3.3.3. Ecuación de balance de masa para la fase fluida	26
3.4. Ley constitutiva de erosión	26
3.4.1. Ley constitutiva de erosión como modelo de difusión de la porosidad	27

3.5. Ley de gobierno para flujo de fluido en medios porosos	28
3.5.1. Ley de permeabilidad	33
4. Modelo Poro-Mecánico de Producción de Arena	35
4.1. Conceptos básicos de elasticidad y plasticidad	35
4.2. Modelo constitutivo elástico incremental no lineal dependiente del esfuerzo .	40
4.3. Plasticidad incremental de tres dimensiones	48
4.3.1. Descomposición de las deformaciones	48
4.3.2. Endurecimiento y regla de flujo	49
4.3.3. Superficie de Fluencia	49
4.4. Poro-Elasticidad	52
5. Modelo Acoplado de Producción de Arena	55
5.1. Proceso poro-elásto-plástico	55
5.2. Proceso de erosión de la matriz de roca	58
6. Conclusiones y Trabajo Futuro	60
6.1. Resumen del trabajo	60
6.2. Conclusiones y trabajo futuro	61
A. Esfuerzo elástico equivalente	63
B. Ecuaciones de equilibrio para un cuerpo	65

Capítulo 1

Introducción

1.1. Conceptos generales, antecedentes y motivación

1.1.1. Yacimientos de petróleo

Un yacimiento es un cuerpo rocoso subterráneo que presenta la porosidad y la permeabilidad suficientes para almacenar y transmitir fluidos. Los tipos de rocas mas comunes que conforman un yacimiento son las sedimentarias. Estas rocas tienen mayor porosidad que las rocas ígneas y las metamórficas y se encuentran en mejores condiciones, bajo las cuales los hidrocarburos puedan ser preservados. Los yacimientos de petróleo se pueden dividir en dos grupos principales, los yacimientos de petróleo pesado y los yacimientos de petróleo liviano.

1.1.1.1. Yacimientos de petróleo pesado

El petróleo pesado es el petróleo crudo de alta viscosidad mayor a 10 cP , presenta densidades API entre $10^\circ - 22,3^\circ$ API según el departamento de energía de EUA. Existen formaciones como las “Oil Sands” conformadas por una mezcla de bitumen, arena, arcilla y agua en las cuales se encuentra petróleo pesado. En el mundo el deposito mas grande descubierto a la fecha de oil sands se encuentra en Athabasca al norte de Alberta en Canada, seguido por el deposito del río Orinoco en Venezuela. El deposito de Athabasca con su extensión superior a $42,000\text{ km}^2$ contiene mas petróleo almacenado que las reservas conocidas de Arabia Saudita. El petroleo crudo pesado ocupa entre el (10% – 12%) de

las actuales oil sands encontradas en Alberta, entre el (80 % – 85 %) es material mineral (arena y arcilla) y entre el (4 % – 6 %) es agua.

Las técnicas mas comunes de explotación del petróleo pesado son la minera, la recuperación térmica y la producción en frío. La explotación minera es económicamente viable hasta una profundidad máxima aproximada a los 75 metros. Entre el (10 % y 20 %) del total de las oil sands puede ser explotada con la minería pero las compañías petroleras prefieren explotar pocas capas superficiales de oil sands con técnicas mineras, por altos los costos de explotación.

El petróleo restante depositado en las oil sands puede ser explotado por procesos de recuperación térmica. La recuperación térmica consiste en separar el petróleo pesado de la arena, calentando la formación para bajar la viscosidad del petróleo, lo que permite al petróleo separarse de la arena y fluir con mayor facilidad. Un proceso térmico conocido como inyección cíclica de vapor consiste en perforar dos pozos verticales. Por uno de ellos se inyecta vapor a alta presión a la formación, por lo que se separa el petróleo pesado de la arena, mientras que la presión inducida empuja el petróleo hacia el segundo pozo de donde este puede ser bombeado. Otra técnica de explotación térmica es conocida como “drenaje gravitacional asistido por vapor” (SAGD, por sus siglas en inglés) [13]. La perforación de dos pozos horizontales en pares apilados uno encima del otro constituyen la unidad básica del SAGD, el vapor inyectado dentro del pozo superior baja la viscosidad del petróleo vecino y la fuerza de gravedad hace que el petróleo fluya hacia el pozo inferior para su producción. Los pares de pozos SAGD se pueden perforar siguiendo las características sedimentarias de la formación ó en patrones diseñados para optimizar la recuperación.

Otra técnica de explotación es la producción en frío, en la cual no se introduce calor a la formación para la explotación del petróleo pesado. Consiste en bombear en conjunto la arena y el petróleo, para después separarlos en la superficie. Esta técnica es aplicada en campos de petróleo pesado no consolidados. En la producción en frío se presenta el fenómeno de producción de arena en las formaciones débiles y no consolidadas cuando son necesarias altas tasas de bombeo de fluido, las cuales desalojan cantidades considerables de sólidos de la formación. La producción masiva de sólidos acarrea problemas como la falla del pozo, asentamientos en el terreno, el aumento de recubrimiento de tuberías y bombas y el desgaste producido en los equipos por el transporte de la arena.

1.1.1.2. Yacimientos de petróleo liviano

Los yacimientos de petróleo liviano contienen petróleo crudo con una densidad tan baja como 40° API. En los yacimientos de petróleo liviano conformados por roca arenisca se presenta el fenómeno de producción de arenadurante la explotación del petróleo. Ocurre cuando la formación tiene un resistencia baja y es capaz de fallar por los esfuerzos presentes y los cambios de esfuerzos inducidos en el proceso de producción del petróleo. Los granos de arena provenientes de la arenisca fallada son desaojados y transportados por el flujo de fluido, lo anterior puede provocar problemas de estabilidad de pozo, reducción de la producción de petróleo, colapso de la tubería de revestimiento y en casos extremos la pérdida total del pozo.

En contrariedad a estos problemas mencionados un fenómeno de producción de arenalimitado puede incrementar la producción de hidrocarburo de un pozo, gracias al aumento de la porosidad y de la permeabilidad de la roca de la roca. La porosidad, la permeabilidad y la presión presentes en un yacimiento de petróleo son los factores que determinan el comportamiento del yacimiento, la densidad y viscosidad del petróleo son las propiedades que dictan la metodología que se debe tomar para encaminar la producción del hidrocarburo.

Según [13] los petróleos crudos presentan una amplia gama de densidades y viscosidades. La viscosidad a la temperatura de yacimiento es la medida de mayor importancia para producir petróleo crudo. Esta es utilizada para determinar con que facilidad fluirá el petróleo de la formación. Para la refinación del petróleo crudo es de mayor importancia la densidad, que se toma como un indicador para determinar los posibles derivados resultantes durante el proceso de refinación. Estas dos propiedades no están correlacionadas de manera precisa, se puede ver en ocasiones que un petróleo crudo de mediana o baja densidad con alto contenido de parafina en un yacimiento frío y no profundo puede llegar a tener una viscosidad mayor que un petróleo crudo pesado libre de parafina en un yacimiento profundo y con una alta temperatura. La temperatura es un factor que afecta de manera directa la viscosidad, por el contrario la densidad varia poco con los cambios de la temperatura, por esto, la densidad es un parámetro estándar de categorización de los petróleos crudos. La densidad en el campo del petróleo se define por lo general en grados API por sus siglas en ingles (Instituto Americano del Petróleo) y se relaciona con la gravedad especifica. Para un petróleo mas denso la densidad API es mas baja. Un rango desde el bitumen rico en brea hasta los condensados varia entre 4 y 70 grados API respectivamente.

1.1.2. Principio del esfuerzo efectivo

Según [12], de acuerdo a Skempton, la idea del esfuerzo efectivo fue formulada por Von Terzaghi en 1936. El principio del esfuerzo efectivo dice que los esfuerzos en cualquier punto de una sección transversal de una masa de suelo pueden ser calculados por los esfuerzos totales principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ que actúan en ese punto. Según Terzaghi, si los vacíos del suelo están llenos de agua bajo un esfuerzo u , el esfuerzo total principal está compuesto por dos partes. Una parte, u que actúa en el agua y en el suelo en cualquier dirección con igual intensidad, al que Terzaghi llama el esfuerzo neutro ó presión de agua en los poros (también conocido como presión de poros). Terzaghi planteó la siguiente ecuación de balance,

$$\sigma'_{(1,2,3)} = \sigma_{(1,2,3)} - u \quad (1.1)$$

la cual representa un exceso, es decir una diferencia entre el esfuerzo total $\sigma_{(1,2,3)}$ y la presión de poros u , este exceso está dado por σ' el cual es llamado esfuerzo efectivo principal. El esfuerzo efectivo principal está relacionado exclusivamente con la resistencia de la parte sólida del suelo y es la otra parte que conforma el esfuerzo total.

Según [6] en la geomecánica de rocas de yacimientos petroleros, es usada una definición para el tensor de esfuerzos efectivos dada por,

$$\sigma' = \sigma - \alpha p \quad (1.2)$$

donde el término α es llamado la constante poroelástica de Biot ó el coeficiente de Biot. Biot introdujo el concepto de una “semi-linealidad”, el cual estipula que las deformaciones de la matriz sólida dependen linealmente del esfuerzo total y de la presión de poros, mientras que las deformaciones debidas al esfuerzo efectivo presentan modificaciones no lineales en la geometría local, como los cambios en las áreas de contacto intergranular y el cierre de fisuras. Para la poro-elasticidad considerando los dos comportamientos lineal y no lineal y suponiendo la matriz sólida del material isotrópica y linealmente elástica, con un modulo volumétrico K_s y un modulo volumétrico drenado K_0 , el término α se define como,

$$\alpha = 1 - \frac{K_0}{K_s} \quad (1.3)$$

1.1.3. Comportamiento mecánico de un yacimiento

El comportamiento mecánico de un yacimiento y la falla mecánica del mismo, esta controlado por diferentes factores. Según [1] por lo dicho por (Desroches J y Woods), los principales factores son la resistencia de la roca que conforma el yacimiento, los esfuerzos

terrestres principales que actúan sobre la formación rocosa, la presión de poros y los esfuerzos inducidos en el proceso de perforación, producción y terminación del pozo petrolero.

La resistencia de la roca es posible determinarla en ensayos de laboratorio, como los triaxiales y uniaxiales, los resultados de estas pruebas normalmente se representan de manera gráfica mediante envolventes de falla. Con el uso del círculo de Mohr se puede determinar los esfuerzos normales y de corte ejercidos sobre un plano específico, al aplicar tres esfuerzos principales perpendiculares a un espécimen representativo de roca de la formación. Para conocer a que valores de resistencia se produce la falla comúnmente es utilizado el modelo de falla de Mohr-Coulomb, el cual relaciona los esfuerzos principales, la presión de poros, la cohesión y el ángulo de fricción interna de la roca.

La falla de un material se puede producir por tensión, compresión o cuando se produce un esfuerzo de corte mayor al que puede resistir la roca. Las condiciones a las que esta expuesto el cuerpo rocoso (yacimiento) por lo general son de gran magnitud. La resistencia de la roca bajo estas condiciones esta dada por su cohesión asociada a la cementación que presente la misma, el ángulo de fricción interna, los esfuerzos principales a los que esta sometida y la presión de poros. Según [1] un yacimiento conformado por una roca sedimentaria, consolidada y bien cementada muestra una tendencia a ser mas resistente que una roca no consolidada y pobremente cementada. Los cambios de la presiones que se generan durante la producción de petróleo o en el agotamiento del pozo, como la caída de la presión pueden generar fallas de corte en la roca. Por ejemplo, al disminuirse la presión de poros, el esfuerzo efectivo generado es mayor, si este excede la resistencia máxima de la roca se produce un falla. El agotamiento del petróleo en el yacimiento puede generar mayor esfuerzos de corte en la vecindad del pozo llevando el estado de esfuerzos a estar mas cerca de la falla o inclusive a fallar.

1.2. Motivación

La producción de arena es un problema que puede presentarse en la explotación de petróleo en yacimientos de roca arenisca. Este problema se ha afrontado por los productores de petróleo con el uso de metodologías practicas resultado de la experiencia y el conocimiento en ocasiones empírico de las empresas petroleras, como los mecanismos convencionales de terminación de pozo y la reducción de las tasas de flujo de petróleo. Estas metodologías son implementadas de manera común después de haber iniciado el problema con el fin de mitigarlo, con el uso de técnicas que usualmente van en detrimento de la producción normal de petróleo del pozo en el que ya se ha presentado producción de

arena. Entender el mecanismo de producción de arena como un fenómeno geomecánico, buscar un modelo capaz de predecir su aparición en un yacimiento de petróleo y eventualmente encontrar un equilibrio entre la tasa de producción de normal de petróleo en un pozo y las técnicas utilizadas para prevenir la aparición o el debido control del problema según sea el escenario se convierte en la motivación de este trabajo de investigación. Lo anterior partiendo de la necesidad de entender el problema desde su descripción física con las condiciones propias del yacimiento como los esfuerzos y las deformaciones presentes, las propiedades mecánicas del material, las propiedades del petróleo y las sollicitaciones y fuerzas aplicadas en los procesos de producción.

1.3. Objetivos de la investigación

- Entender los procesos físicos y mecánicos que se presentan en los yacimientos de petróleo antes del inicio y durante el desarrollo del fenómeno de producción de arena en la explotación de pozos petroleros.
- Entender modelos matemáticos utilizados para describir el comportamiento mecánico y erosivo del material del yacimiento de petróleo para predecir la producción de arena.
- Presentar el modelo matemático hidro-geomecánico acoplado con la teoría y ecuaciones de la poro-elasto-plasticidad y la teoría y ecuaciones de erosión, con el que se pueda encontrar un equilibrio entre la producción normal de un pozo petrolero y el nivel de esfuerzos que puede soportar un yacimiento ante la posible ocurrencia de producción de arena.
- Realizar un documento claro y de fácil entendimiento, profundizando en las explicaciones de los conceptos básicos, ecuaciones y teorías utilizadas para el planteamiento, descripción y formulación matemática del problema.

Capítulo 2

Estado del Conocimiento

El fenómeno de producción de arena se presenta durante el proceso de explotación de petróleo en yacimientos conformados por roca arenisca.

Según Wang (2003)[16] la producción de arena es un proceso erosivo, en el cual la matriz de arena de una roca arenisca se degrada cerca a las fracturas laterales inducidas de un pozo petrolero, debido a la combinación del cambio de los esfuerzos in-situ y el flujo de fluido cuando el fluido es bombeado drásticamente de un medio poroso no consolidado. En este proceso de erosión de la matriz, el material fallado (los granos de arena desprendidos de la matriz) forman una capa de material suelto (costra). Al removerse esta capa dañada por la acción del flujo de petróleo, la recuperación del petróleo mejora (aumenta la tasa de producción, porque la porosidad de la superficie libre de la matriz de arenisca aumenta), por la creación de cavidades de forma cónica alargada de mayor permeabilidad y la creación de canales alongados de alta permeabilidad conocidos como “wormholes”. Esto es un efecto beneficioso desde el punto de vista de la producción del hidrocarburo, pero a su vez, esta ligado al flujo masivo de arena, el cual acarrea consigo una serie de problemas como la inestabilidad del pozo, la erosión de las tuberías, el taponamiento de líneas de conducción, las fallas del encamisado del pozo, el asentamientos del terreno y el deposito de arena.

Los operadores han recurrido a abordar el tema de manera multifacética valiéndose de los conocimientos y técnicas existentes para buscar interpretaciones lógicas y generar soluciones viables al problema. Según [1] conocer las causas, el comportamiento y los efectos de la producción de arena es una parte fundamental en las investigaciones que se vayan a realizar para analizar el problema planteado. El fenómeno de producción de arenaha podido simularse por medio de métodos de elementos finitos con simulaciones de falla del material, el flujo del fluido y de las partículas de arena suspendidas en el fluido, para una

geometría que representa un problema de contorno, basados en ecuaciones, leyes y teorías de comportamientos de materiales.

2.1. Física de la producción de arena

El fenómeno de producción de arena se presenta en yacimientos de petróleo, conformados por roca arenisca, durante el proceso de explotación de petróleo. Según Wang (2003)[16] la producción de arena ocurre cuando la fuerza aplicada por el flujo de fluido sobre las partículas de arena que conforman la roca es mayor que su resistencia (pérdida de la integridad mecánica del material de la formación), el material de la formación (roca) colapsa de manera local y los fragmentos de arena son llevados por el petróleo hacia el pozo, estos pueden bloquear el flujo de petróleo, dañar las bombas y tuberías de explotación, contaminando a su vez el petróleo producido. Durante el fenómeno de producción se crean cavidades en la formación que crecen en tamaño que pueden llegar a ser inestables, también se forman canales de alta permeabilidad llamados “wormholes”.

La figura 2.1 muestra las cavidades que se forman a partir de las fracturas horizontales inducidas en un pozo petrolero vertical. Estas cavidades van creciendo en tamaño (alargándose) cuando ocurre el fenómeno de producción de arena. se observa con la línea punteada la zona que falló y que está siendo desalojada por el flujo de fluido hacia el pozo de producción. Por otra parte la producción de arena o sand production también puede

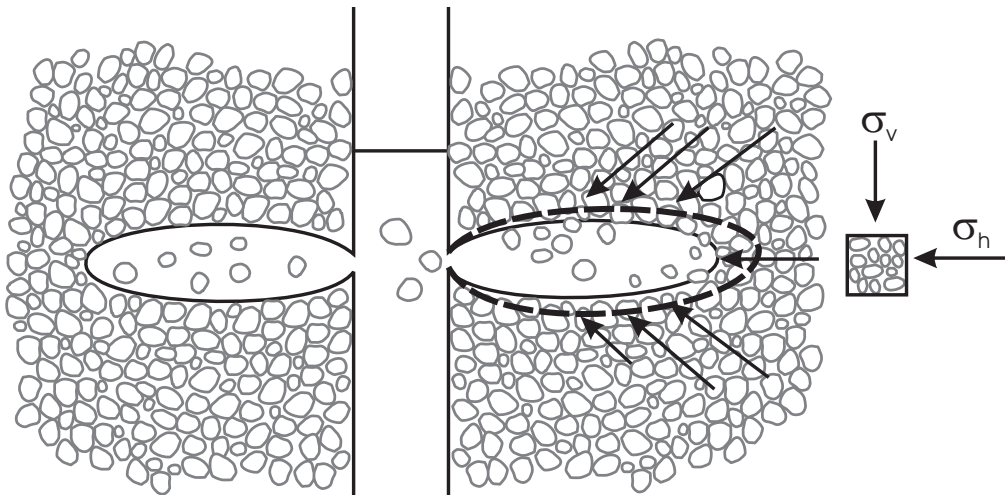


Figura 2.1: Esquema de cavidades y desalojo de partículas

definirse como un proceso que ocurre por la combinación de dos mecanismos en la explotación de un pozo petrolero, el cambio de esfuerzos y la erosión del material. Se presenta

en una formación de roca arenisca cuando el cambio de los esfuerzos presentes es suficiente para generar una falla localizada en la roca resultado de la aplicación de una fuerza mayor a la resistencia propia de la roca. Luego los granos que se desagregan de la matriz que falló son desalojados y transportados por el fluido en un proceso erosivo hacia el pozo de explotación. Al presentarse este fenómeno se afectan los márgenes de producción de hidrocarburos, se pueden dañar las instalaciones y los equipos del pozo, lo anterior reflejado en sobrecostos de producción de petróleo.

2.2. Clases de producción de arena

La producción de arena puede clasificarse en diferentes clases dentro de los distintos periodos de la vida de un pozo petrolero en un yacimiento de arenisca. Según Morita et al (1987)[10] citado por Wang (2003)[16], existe una etapa temprana y transitoria en la cual se produce arena al rededor de pequeñas cavidades, generando un daño mínimo, una parte limitada del total de la cantidad de arena desagregada de estas cavidades es removida y la restante actúa como soporte del esqueleto de arena rígido en la vecindad de la superficie de la cavidad. Las cavidades se van agrandando en tamaño debido a la remoción de las zonas falladas con la ocurrencia del fenómeno de producción de arena. Al aumentar el gradiente de presión de poros una mayor cantidad de arena es removida y la estructura del esqueleto de la cavidad es desestabilizada, lo que da paso al aumento de la producción de arena.

Otra etapa ocurre después de realizar una estimulación al yacimiento con la inyección de flujo de vapor de agua. En la cual se forman canales abiertos en la parte alta de la cavidades, en esta etapa la producción de arena cae a un nivel bajo. En una etapa final de agotamiento de la presión del yacimiento puede presentarse producción de arena inestable temporalmente.

Por otra parte según Vaziri et al (2002)[5], la ocurrencia de producción de arena puede dividirse en una etapa inicial de presión inducida y una etapa final de agotamiento inducido. La primera etapa ocurre al inicio de la vida del yacimiento debido al alto gradiente de presión, con altos valores de esfuerzos efectivos que causan grandes deformaciones plásticas capaces de desagregar granos de la matriz de arena y remover las partículas hacia el pozo. La etapa final ocurre debido a las deformaciones por ablandamiento y salida de agua, las cuales son capaces de destruir la capilaridad entre las partículas de arena y remover la arena producida hacia el pozo de explotación.

2.3. Estados del proceso de erosión en un material granular saturado

Teniendo un material granular saturado (todos los poros llenos de fluido, ningún poro vacío ni lleno de gas) donde se presente el problema de producción de arena, el proceso de erosión del material de la matriz desde el punto de vista microscópico según Steeb et al. (2004) [14] consiste en que los granos alojados en un entorno lleno de fluido (saturado) pierden los contactos vecinos, esta inestabilidad microscópica se refleja en resultados macroscópicos observados como una transición instantánea de fase desde el estado sólido al estado líquido, este entendimiento del problema fue motivado por observaciones microscópicas según Steeb et al. (2004) [14]. En un material con todos los poros llenos de

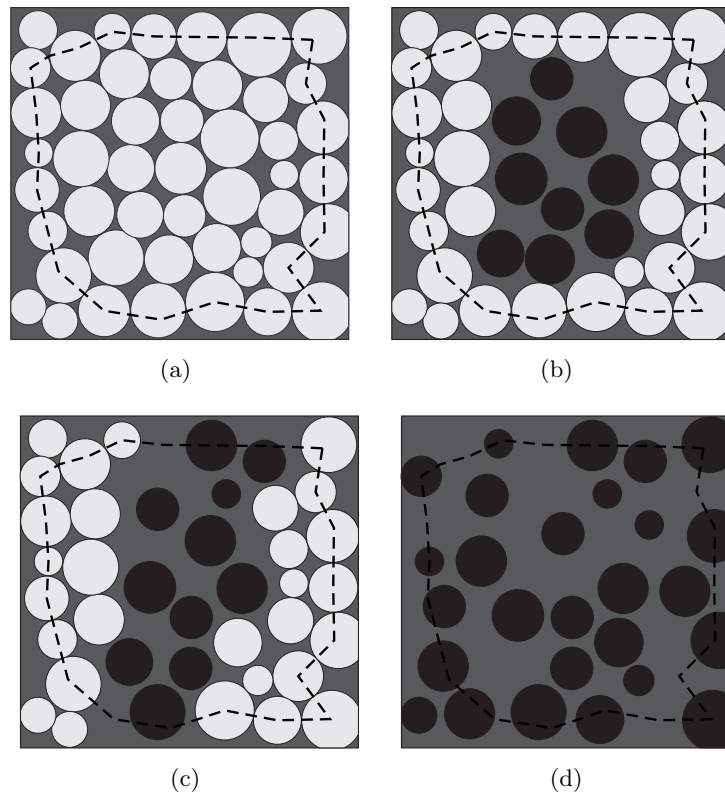


Figura 2.2: Diferentes etapas del proceso de fluidización

fluido, la mezcla puede ser dividida en dos componentes, una parte del fluido viscoso que se encuentra en los poros y una parte que consiste en el material sólido. Según la Figura 2.3 varios etapas etapas del proceso de erosión de este tipo de material deben ser distinguidas.

Si se considera el polígono de línea punteada como un elemento de volumen represen-

tativo (EVR) de la mezcla, en la (etapa a) no se ha presentado el proceso erosivo, por esto en la mezcla se distinguen dos fases, denotadas V_s y V_f que son las componentes de las fases sólida y líquida respectivamente, en esta etapa todos los granos están en contacto y transmiten esfuerzos. En la (etapa b) y la (etapa c) algunas partículas han perdido todos sus contactos con granos vecinos y por esto no transmiten esfuerzos, en esta mezcla se distingue una nueva fase denotada V_{fs} , que está compuesta por las partículas sólidas suspendidas en el fluido, en la (etapa d) ningún grano está en contacto y todas estas partículas sólidas están suspendidas en el fluido.

El comportamiento macroscópico de la mezcla puede describirse con la aplicación de la teoría de medios porosos con el uso del concepto de fracciones de volumen y la teoría de mezclas del continuo.

2.4. Modelo acoplado de erosión y análisis de Estabilidad

La presente sección forma parte de la revisión bibliográfica, está basada en los artículos *Hidromechanical-mechanical aspects of the sand production problem* [7] y *Coupled wellbore erosion and stability analysis* [9] de M. Stavropoulou, P. Papanastasiou and I. Vardoulakis. El fenómeno sand production es presentado como un acople de dos mecanismos según M. Stavropoulou, P. Papanastasiou and I. Vardoulakis [9] el modelo consiste en la falla mecánica de la roca y la erosión de la arena desprendida de la roca. La porosidad en función del tiempo y el espacio al desarrollarse la erosión superficial es tomada como el parámetro acoplador de los dos mecanismos.

Los diferentes procesos que se presentan en la producción de arenason asociados al movimiento de materiales sólidos y líquidos, a la interacción fluido-roca y a la deformación de la roca. Para la modelación del problema dos mecanismos de falla son relacionados (1) La inestabilidad mecánica y la falla localizada de la roca en la vecindad del pozo debido a la concentración de esfuerzos y (2) un mecanismo de falla de inestabilidad hidromecánica debido a la erosión interna y superficial del pozo manifestados en el relajamiento y desplazamiento de partículas causada por la fuerza de infiltración.

El mecanismo de falla mecánica y el mecanismo de erosión son acoplados cuando la concentración de esfuerzos es suficiente para generar un daño localizado en la roca. Al fallar la roca se incrementa la cantidad de partículas sueltas que pueden desprenderse de la matriz de roca y aumentar la cantidad de partículas en transporte. Por otra parte el lavado de partículas incrementa la porosidad de la roca sana y puede causar un reajuste de

las fuerzas intergranulares dando paso a un futuro decrecimiento de la resistencia y daño de la roca (debilitamiento).

Los modelos de predicción de arena existentes para 1996 trataban de entender el fenómeno de la producción de arena como un problema de estabilidad de un pozo y solo se encaminaron hasta la fase inicial del problema, es decir hasta la falla del material, en la que se comienza a producir arena.

Según I. Vardoulakis, M. Stavropoulou, P. Papanastasiou fue [7] el primer trabajo que consideró la producción de arena como un problema de erosión fue en 1996, donde se examinaron los aspectos hidro-mecánicos del problema de sand production y se dejó planteada la estructura básica del modelo matemático. La erosión superficial del pozo y los efectos del bombeo fueron estudiados y basados en las ecuaciones de balance de masa, consideraciones de transporte de partículas y la ley Darcy. En esta investigación todas las consideraciones de deformación y rigidez de la roca fueron supuestas, proponiendo tener un material cohesivo que tiende a perder arena, se hizo énfasis en el transporte de masa (material). En este trabajo se consideró un flujo normal de Darcy hacia la superficie libre de un semi-espacio no homogéneo con permeabilidad dependiente de la porosidad dada por la ecuación de Carman-Kozeny. Los resultados mostraron que la erosión superficial estaba acompañada a grandes cambios en la porosidad y permeabilidad cercanos a la superficie libre del material. Se sugirió que las cantidades medibles como la descarga de fluido ó la cantidad de arena producida pueden usarse para determinar parámetros constitutivos del problema, al realizar un calculo inverso.

Los investigadores I. Vardoulakis, M. Stavropoulou and P. Papanastasiou, usan las siguientes consideraciones para modelar la producción de arena como un acople entre la erosión de arena y el daño mecánico de la roca alrededor del pozo de explotación de petroleo.

- Se considera un pozo en una formación profunda.
- El flujo de fluido se considera radial y se dirige hacia la superficie libre del pozo.
- La simetría es radial alrededor del eje del pozo.
- La roca es tomada como un material poroso y permeable.
- La erosión es gobernada principalmente por la posibilidad que tienen los granos de atravesar los espacios vacíos interconectados y la existencia de puntos de inicio de erosión.

Capítulo 3

Modelo de Erosión de Producción de Arena

3.1. Introducción

En el presente capítulo se presenta un modelo matemático que describe el comportamiento erosivo del material, es decir, la roca que conforma el yacimiento durante la explotación de petróleo. El presente modelo está inspirado en investigaciones realizadas en gran parte por los desarrollos, planteamientos teóricos, experimentales y resultados publicados por Vardoulakis et al.

El comportamiento de un geo-material (arenisca) erosionable y saturado de petróleo sometido a esfuerzos, deformaciones y flujo de fluido está comprendido por dos comportamientos. El comportamiento poro-mecánico del sistema sólido-fluido, el cual se describe con la teoría y ecuaciones de la poro-elasto-plasticidad y el comportamiento erosivo de la matriz sólida descrito por la teoría y ecuaciones de erosión.

El modelo se basa en el balance de masa y en las consideraciones para el transporte de partículas. Las ecuaciones para el balance de masa de cada una de las fases se derivan de la teoría de mezclas del continuo con el uso de relaciones básicas de masa volumen de la mecánica clásica de suelos y la velocidad y el flujo de los componentes de las fases. El flujo de fluido se considera normal desde el medio poroso hacia la superficie libre del pozo de un semi espacio no homogéneo, la permeabilidad del medio es dependiente de la porosidad. Este tipo de flujo es introducido al modelo por la ley de Darcy para medios porosos la cual obedece el tipo de flujo considerado.

Los diferentes procesos que se presentan en producción de arena están asociados al transporte de sólidos y fluidos, a la interacción roca/fluido y a la deformación de la roca. Investigaciones realizadas con el objetivo de modelar la producción de arena en la explotación de pozos petroleros relacionan al fenómeno con dos mecanismos según [7]. El mecanismo de inestabilidad mecánica y la falla localizada de la roca en la vecindad del pozo de explotación debido a la concentración esfuerzos y el mecanismo de inestabilidad hidromecánica debido a la erosión interna de la superficie del pozo, el cual se manifiesta en la acomodación y transporte de partículas debido a la acción de la fuerza de infiltración. Estos dos mecanismos se acoplan (se presentan al tiempo) cuando la concentración de los esfuerzos presentes es suficiente para causar un daño localizado en el material, por lo cual se aumenta la cantidad de partículas sueltas las cuales eventualmente pueden desagregarse de la matriz de arena y entrar a formar parte de las partículas sueltas suspendidas y en transporte. Por otra parte, el lavado y desalojo de estas partículas sueltas provenientes de la matriz (roca intacta) aumenta la porosidad de la roca y puede causar un reajuste de las fuerzas intergranulares dando paso a un futuro daño en el material.

En este capítulo se formula un modelo matemático para el mecanismo de erosión que causa la inestabilidad hidromecánica, con el uso de la teoría de mezclas del medio continuo donde la erosión del medio se relaciona al problema de producción de arena en un yacimiento de roca arenisca. La teoría de erosión toma al continuo como un medio de tres fases para el cual se establecen una serie de ecuaciones y relaciones de las cuales se obtiene una ecuación de balance de masa para cada una de las tres fases. Para solucionar el modelo de erosión es necesario el uso de una ecuación en forma de ley constitutiva de erosión.

Para describir el flujo multi fase que ocurre en un medio poroso, se utiliza la teoría de mezclas del continuo como una buena aproximación. La premisa básica de esta teoría es que cada punto en el espacio ocupado por la mezcla es ocupado por una partícula conformada por cada uno de los componentes de la mezcla. Por lo cual un espacio ocupado en el mismo tiempo por los componentes de la mezcla solo puede darse dentro del contexto de una homogenización aproximada, según [16]. Una aproximación del continuo es la aproximación del continuo de una sola fase.

- Aproximación del continuo de una sola fase

En esta aproximación se supone que todos los componentes de un sistema multi fase están presentes simultáneamente en cualquier parte y ocupan todo el dominio sin considerar ninguna interacción entre cada una de las fases. Por esto para que la teoría de mezclas del continuo sea aplicable los diferentes componentes deberán estar distribuidos de manera tal

que cada uno de ellos tenga la posibilidad de ser considerado como un solo continuo. En el sentido local cada componente obedecerá la relación constitutiva para ese componente solamente. El concepto de la fracción del volumen de los componentes se introduce para explicar la distribución discontinua. La fracción del volumen es definida como el volumen de cada componente por unidad de material. Para construir un modelo basado en el continuo que se centre en el mecanismo de erosión presente en la sand production se aplica la teoría de mezclas del continuo a un medio poroso saturado de fluido. La producción de arena es vista como un fenómeno de filtración inverso en el cual el transporte de los granos es iniciado mientras que el fluido fluye a través de una matriz porosa en la cual su porosidad, densidad y permeabilidad están en constante cambio.

3.2. Definiciones y suposiciones

El fenómeno de producción de arena ocurre en un medio poroso saturado de fluido (petróleo) cuando este se desestabiliza y se deforma en presencia de esfuerzos y flujo del fluido. Para un medio que presenta un estructura no homogénea es posible aplicar la teoría de mezclas del continuo. En un medio visto como una mezcla de tres fases (trifásico), compuesto por el componente sólido (s) (el cual hace referencia a las partículas sólidas que forman el esqueleto sólido), el componente líquido (f) (el cual hace referencia al fluido del cual están llenos todos los poros del medio) y el componente de las partículas sólidas en suspensión en el fluido (fs) (el cual hace referencia a las partículas sólidas que se desprendieron de la matriz y están en suspensión en el fluido). Cualquier otra partícula suelta que se encuentre atrapada en los poros se supone de la fase sólida. Estos componentes están presentes simultáneamente ocupando cualquier parte de un elemento de volumen representativo (EVR) del medio propuesto.

La Figura 3.1 muestra el esquema de los canales de los poros por donde pueden atravesar la partículas sólidas en suspensión. El fluido ocupa todos los espacios vacíos del medio y se supone que estas partículas viajan a la misma velocidad del fluido donde se encuentran suspendidas.

Para el desarrollo de la teoría de erosión se hacen las siguientes suposiciones,

1. El esqueleto sólido es isotropico y homogéneo.
2. El medio poroso está saturado con un fluido viscoso; Todos sus poros están llenos de fluido.
3. Las partículas sólidas en suspensión en el fluido son partículas desprendidas del esqueleto sólido que viajan con el fluido.

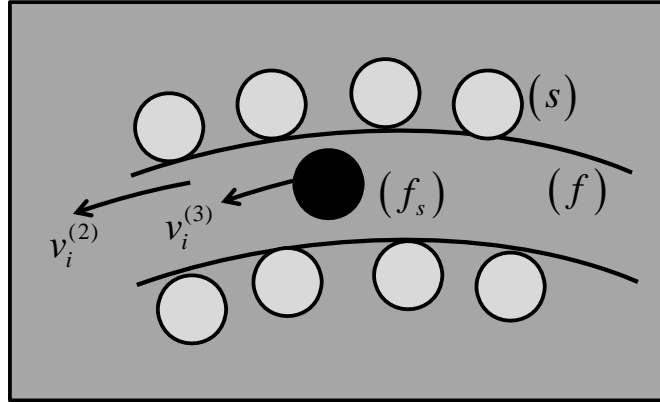


Figura 3.1: Esquema de canales de los poros, adaptada de Vardoulakis, 1996

4. Las partículas sólidas en suspensión en el fluido tienen igual densidad a las partículas sólidas y su densidad es constante.
5. El fluido viscoso es incompresible y su densidad es constante.
6. La velocidad de las partículas sólidas en suspensión es la misma que la velocidad del fluido.

3.3. Medio de tres fases ó trifásico

La Figura 3.2 (a) muestra el elemento de volumen representativo (EVR). Su volumen V puede dividirse en el volumen que ocupan los granos sólidos V_s , el volumen que ocupa el fluido V_f y el volumen que ocupan los granos sólidos en suspensión en el fluido (fluidizados) V_{fs} . La Figura 3.2 (b) muestra el esquema de las tres fases del medio. El volumen total V y el volumen de los vacíos V_v de la mezcla se definen como,

$$V = V_{solido} + V_{liquido} + V_{particSusp.} \quad V = V_s + V_f + V_{fs}, \quad (3.1)$$

$$V_v = V_{liquido} + V_{particSusp.} \quad V_v = V_f + V_{fs} \quad (3.2)$$

Dos relaciones principales para la descripción matemática del problema del medio trifásico son la porosidad n y la concentración de las partículas sólidas en suspensión en el fluido c están definidas como:

$$n = \frac{V_v}{V} = \frac{V_f + V_{fs}}{V} \quad (3.3)$$

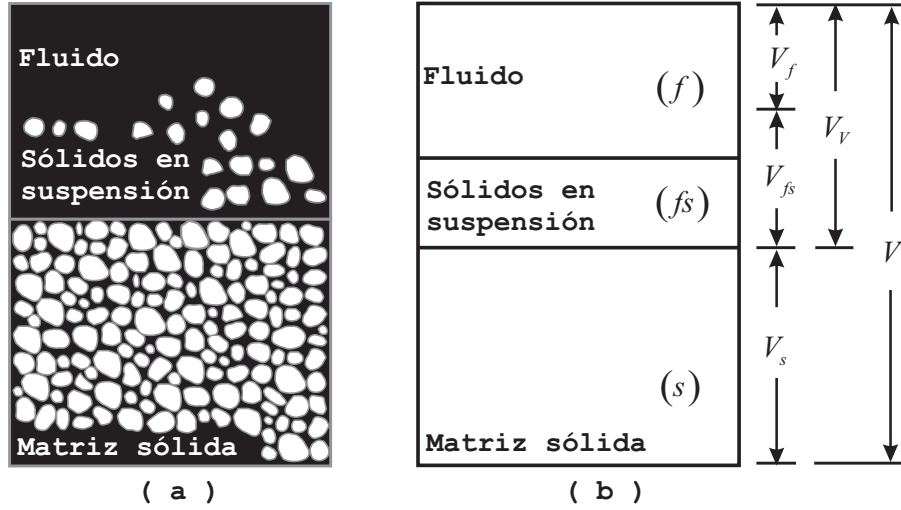


Figura 3.2: Elemento de volumen representativo del medio de tres fases

$$c = \frac{V_{fs}}{V_v} = \frac{V_{fs}}{V_s + V_{fs}} \quad (3.4)$$

La masa m de la mezcla de volumen V es la suma de las masas de los componentes de cada fase, donde m_s es la masa de los sólidos, m_f la masa del fluido y m_{fs} la masa de las partículas sólidas en suspensión en el fluido,

$$m = m_{solido} + m_{liquido} + m_{partiSusp} \quad m = m_s + m_f + m_{fs}. \quad (3.5)$$

La densidad de un medio es la relación entre su masa y su volumen y está dada por:

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (3.6)$$

La densidad de la mezcla es la relación entre la masa m del elemento representativo y su volumen V . Al remplazar las ecuaciones (3.1) y (3.5) en la ecuación (3.6) de la densidad se obtiene una expresión para la densidad de la mezcla en términos de las masas y los volúmenes de cada una de las fases,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_s + m_f + m_{fs}}{V_s + V_f + V_{fs}} \quad (3.7)$$

las densidades de cada uno de los componentes de las fases se definen como,

$$\rho_{solido} = \frac{m_{solido}}{V_{solido}} \quad \rho_s = \frac{m_s}{V_s} \quad m_s = \rho_s V_s, \quad (3.8)$$

$$\rho_{fluido} = \frac{m_{fluido}}{V_{fluido}} \quad \rho_f = \frac{m_f}{V_f} \quad m_f = \rho_f V_f, \quad (3.9)$$

$$\rho_{partiSusp} = \frac{m_{partiSusp}}{V_{partiSusp}} \quad \rho_s = \frac{m_{fs}}{V_{fs}} \quad m_{fs} = \rho_s V_{fs}, \quad (3.10)$$

donde ρ_s , es la densidad de los sólidos, ρ_f es la densidad de fluido y ρ_{fs} es la densidad de las partículas solidas en suspensión en el fluido. Basado en el concepto de fracciones de volumen se define para cada fase una densidad parcial $\rho^{(k)}$ como la masa de cada fase sobre el volumen total de la mezcla para $(k = 1, 2, 3)$, donde $\rho^{(1)}$ es la densidad parcial para la fase sólida, $\rho^{(2)}$ la densidad parcial para la fase liquida y $\rho^{(3)}$ la densidad parcial para la fase de las partículas solidas en suspensión en el fluido como,

$$\rho^{(1)} = \frac{m_s}{V} = \rho_s \frac{V_s}{V} = \rho_s \frac{V - V_f - V_{fs}}{V}, \quad (3.11)$$

$$\rho^{(2)} = \frac{m_f}{V} = \rho_f \frac{V_f}{V} = \rho_f \frac{V_v - V_{fs}}{V}, \quad (3.12)$$

$$\rho^{(3)} = \frac{m_{fs}}{V} = \rho_s \frac{V_{fs}}{V} = \rho_s \frac{V_{fs}}{V}, \quad (3.13)$$

a su vez, la densidad total de la mezcla ρ puede escribirse como la suma de las tres densidades parciales para cada una de las fases según [9], con la siguiente ecuación,

$$\rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \rho^{(3)} = \frac{m_s + m_f + m_{fs}}{V} \quad (3.14)$$

combinando las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) con las ecuaciones (3.3) y (3.4) se pueden escribir las ecuaciones de las densidades parciales de cada una de las fases en términos de la porosidad n del medio y la concentración de las partículas en suspensión en el fluido c

como,

$$\rho^{(1)} = (1 - n)\rho_s, \quad (3.15)$$

$$\rho^{(2)} = (1 - c)n\rho_f, \quad (3.16)$$

$$\rho^{(3)} = cn\rho_s. \quad (3.17)$$

las cuales son una fracción de la densidad de cada uno de los componentes de las fases, al remplazar las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) en la ecuación de la densidad total de la mezcla (3.14) se obtiene,

$$\rho = \frac{m_s + m_f + m_{fs}}{V} = \rho^{(1)} + \rho^{(2)} + \rho^{(3)} = (1 - n)\rho_s + (1 - c)n\rho_f + cn\rho_s \quad (3.18)$$

que es la ecuación con la que se expresa la densidad total de la mezcla del medio trifásico en términos de la porosidad y la concentración.

3.3.1. Velocidad

La velocidad puede definirse como la variación de la posición de una partícula en una determinada cantidad de tiempo, es decir, cuánto varió la posición de la partícula en un lapso de tiempo,

$$v = \frac{d}{t} \quad (3.19)$$

Para un elemento de volumen representativo (EVR) según la Figura 3.3 su volumen dV dado por,

$$dV = dV_s + dV_f + dV_{fs} \quad (3.20)$$

donde dV_s , dV_f y dV_{fs} son los volúmenes de los componentes de las fases sólida, líquida y de partículas en suspensión respectivamente. Este volumen también puede ser expresado como $dV = dA_i \cdot dd_i$ donde dA_i es el área de la sección transversal al flujo del elemento de volumen representativo y dd_i su ancho (distancia), dA_i es la sumatoria de las áreas de la sección transversal de cada una de las fases $dA_i^{(1)}$, $dA_i^{(2)}$ y $dA_i^{(3)}$. Estas áreas son

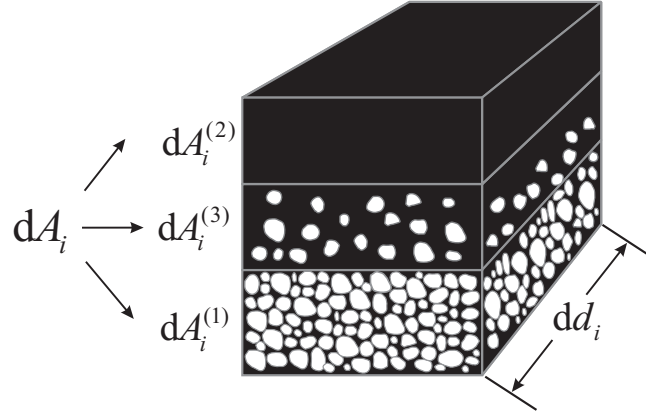


Figura 3.3: EVR

porcentajes aproximados de dA_i y pueden escribirse en términos de n y c por,

$$\frac{dd_i \cdot dA_i^{(1)}}{dd_i \cdot dA_i} = \frac{dV_s}{dV} = \frac{dV - dV_v}{dV} = (1 - n) \quad dA_i^{(1)} \approx (1 - n)dA_i, \quad (3.21)$$

$$\frac{dd_i \cdot dA_i^{(2)}}{dd_i \cdot dA_i} = \frac{dV_f}{dV} = \frac{dV_v - dV_{fs}}{dV} = \frac{ndV - cndV}{dV} = n(1 - c) \quad dA_i^{(2)} \approx n(1 - c)dA_i, \quad (3.22)$$

$$\frac{dd_i \cdot dA_i^{(3)}}{dd_i \cdot dA_i} = \frac{dV_{fs}}{dV} = \frac{c \cdot dV_v}{dV} = cn \quad dA_i^{(3)} \approx cndA_i. \quad (3.23)$$

el área de la sección transversal para cada fase es aproximada y no igual a un porcentaje de dA_i , debido a la diferencia que existe entre la porosidad de un volumen y la porosidad de un área. Al suponer que existe una isotropía estadística en el arreglo de los granos del elemento, se puede decir que la (*porosidad* n volumen = *porosidad* n area). Al dividir el volumen de cada fase entre el área transversal de cada fase se obtiene la distancia que debe recorrer el componente de cada fase denotada con $dd_i^{(k)}$. Al dividir $dd_i^{(k)}$ para ($k = 1, 2, 3$) en un tiempo dt se obtienen las velocidades $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ y $v_i^{(3)}$ de los componentes de las fases sólida, líquida y de partículas en suspensión en el fluido, por esto se escriben las ecuaciones

para las velocidades con el uso las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23),

$$v_i^{(1)} = \frac{dd_i^{(1)}}{dt} = \frac{dV_s}{dA_i^{(1)} dt} = \frac{dV_s}{(1-n)dA_i dt}, \quad (3.24)$$

$$v_i^{(2)} = \frac{dd_i^{(2)}}{dt} = \frac{dV_f}{dA_i^{(2)} dt} = \frac{dV_f}{n(1-c)dA_i dt}, \quad (3.25)$$

$$v_i^{(3)} = \frac{dd_i^{(3)}}{dt} = \frac{dV_{fs}}{dA_i^{(3)} dt} = \frac{dV_{fs}}{cndA_i dt}. \quad (3.26)$$

Suposiciones

1. el esqueleto conformado por las partículas sólidas es rígido.
2. la velocidad de las partículas en suspensión en el fluido, es igual a la velocidad del fluido.

Con la primera suposición se puede decir que la velocidad $v_i^{(1)} \approx 0$. Con la segunda suposición que $v_i^{(3)} = v_i^{(2)}$. teniendo que la velocidad de las partículas en suspensión en un fluido es una fracción de la velocidad del fluido por $v_i^{(3)} = \xi v_i^{(2)}$, y según [4] de acuerdo a lo dicho por [2], como resultado de estudios experimentales de un proceso de filtración se sugiere que este coeficiente sea $\xi \approx 0,5$, en tal caso se podría decir que la velocidad de las partículas en suspensión es el promedio entre entre la velocidad del fluido y la velocidad de los sólidos como, $v_i^{(3)} \approx \frac{(v_i^{(1)} + v_i^{(2)})}{2} = \frac{v_i^{(2)}}{2}$.

3.3.2. Flujo específico relativo

El caudal Q que pasa por un elemento de volumen representativo de un medio es la cantidad de volumen que pasa por este en la unidad de tiempo. En un medio poroso trifásico con tres componentes (s, f, fs) sólido, líquido y partículas sólidas en suspensión en el fluido respectivamente como se muestra en la Figura 3.4, , al suponer que el esqueleto sólido compuesto por la partículas sólidas es rígido, la velocidad de las partículas sólidas se hace $v_i^{(1)} = 0$, por esto los dos únicos componentes que fluirán son los de las fases (f, fs). El caudal total puede escribirse como,

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad (3.27)$$

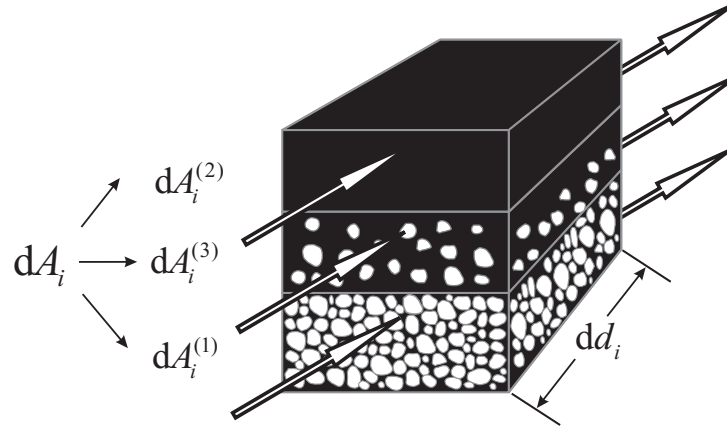


Figura 3.4: Flujo en un elemento

al combinar (3.27) con la ecuación (3.20), puede expresarse el caudal total del medio Q de la siguiente manera,

$$Q = \frac{dV_s + dV_f + dV_{fs}}{dt} \quad (3.28)$$

utilizando el concepto de fracciones de volumen, puede obtenerse los caudales parciales $Q_i^{(k)}$ para cada una de las fases como,

$$Q = \frac{dV_s + dV_f + dV_{fs}}{dt} = \frac{dV_s}{dt} + \frac{dV_f}{dt} + \frac{dV_{fs}}{dt} = Q_i^{(1)} + Q_i^{(2)} + Q_i^{(3)} \quad (3.29)$$

donde $Q_i^{(1)}$, $Q_i^{(2)}$ y $Q_i^{(3)}$ son los caudales parciales para la fase sólida, líquida y de partículas sólidas en suspensión en el fluido. La tasa de descarga de volumen ó el flujo específico relativo q_i está definida como el volumen de flujo dV que pasa a través de una sección transversal de área dA_i en el tiempo dt ó como el caudal Q sobre el área de la sección transversal al flujo dado por,

$$q_i = \frac{dV}{dA_i dt} = \frac{Q}{dA_i} = \frac{dV_s + dV_f + dV_{fs}}{dA_i dt} \quad (3.30)$$

basado en el concepto de fracciones de volumen la ecuación (3.30) para la tasa de descarga de volumen puede expresarse como la sumatoria de las tasas de descarga de volúmenes parciales de cada una de las fases como,

$$q_i = \frac{dV_s + dV_f + dV_{fs}}{dA_i dt} = q_i^{(1)} + q_i^{(2)} + q_i^{(3)} \quad (3.31)$$

donde cada $q_i^{(k)}$ está dando por la expresiones,

$$q_i^{(1)} = \frac{dV_s}{dA_i dt}, \quad (3.32)$$

$$q_i^{(2)} = \frac{dV_f}{dA_i dt}, \quad (3.33)$$

$$q_i^{(3)} = \frac{dV_{fs}}{dA_i dt}. \quad (3.34)$$

combinando las ecuaciones (3.32), (3.33) y (3.34) con la ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.26) de velocidad, puede expresarse las tasas parciales de descarga de volúmenes en términos de n y c por,

$$q_i^{(1)} = \frac{dV_s}{dA_i dt} \quad v_i^{(1)} = \frac{dV_s}{(1-n)dA_i dt} \Rightarrow q_i^{(1)} = (1-n)v_i^{(1)}, \quad (3.35)$$

$$q_i^{(2)} = \frac{dV_f}{dA_i dt} \quad v_i^{(2)} = \frac{dV_f}{n(1-c)dA_i dt} \Rightarrow q_i^{(2)} = n(1-c)v_i^{(2)}, \quad (3.36)$$

$$q_i^{(3)} = \frac{dV_{fs}}{dA_i dt} \quad v_i^{(3)} = \frac{dV_{fs}}{cndA_i dt} \Rightarrow q_i^{(3)} = cnv_i^{(3)} = cnv_i^{(2)}. \quad (3.37)$$

teniendo en cuenta la suposición para la velocidad de las partículas sólidas $v_i^{(1)} = 0$ el flujo parcial es $q_i^{(1)} = 0$ es decir estas no fluyen por ser el esqueleto rígido. Al realizar la suma de todos los $q_i^{(k)}$ se obtiene la ecuación de la tasa de descarga de volumen ó el flujo específico relativo q_i de la mezcla partículas sólidas en suspensión-fluido como se muestra en la siguiente ecuación,

$$q_i = 0 + n(1-c)v_i^{(2)} + cnv_i^{(2)} = nv_i^{(2)} - nc v_i^{(2)} + cnv_i^{(2)} \Rightarrow q_i = nv_i^{(2)} = \frac{q_i^{(2)}}{(1-c)} \quad (3.38)$$

3.3.3. Balance de masa

La ecuación de balance de masa esta dada por le siguiente ecuación,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = \frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.39)$$

donde v es la velocidad y \dot{m} es la tasa de masa producida por unidad de volumen, es decir el cambio de la masa dentro del dominio del volumen V . Este cambio es debido a la variación de la densidad de la masa con el tiempo. Puede expresarse ecuaciones de balance de masa para cada una de las fases del medio poroso saturado con el uso de: el concepto de fracciones de volumen, las densidades parciales y las velocidades de cada uno de sus componentes. La ecuación general de balance de masa para las fases esta dada por,

$$\frac{\partial \rho^{(k)}}{\partial t} + \text{div} \left(\rho^{(k)} v_i^{(k)} \right) = \frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.40)$$

donde ($k = 1, 2, 3$) para la fase sólida, fluida y de partículas sólidas en suspensión en el fluido respectivamente.

3.3.3.1. Ecuación de balance de masa de la fase sólida

La ecuación (3.40) es la ecuación general de balance de masa de las tres fases para ($k = 1, 2, 3$). En un elemento de volumen representativo EVR compuesto por las tres fases (s, f, fs), se puede escribir una ecuación de balance de masa para la fase sólida utilizando la ecuación (3.40) cuando $k = 1$,

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \text{div} \left(\rho^{(1)} v_i^{(1)} \right) = \frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.41)$$

el término de la derecha de esta ecuación es la tasa de masa producida por unidad de volumen, es decir, la masa que se remueve debido a la erosión del esqueleto sólido (matriz de arena), al remplazar $\rho^{(1)}$, $v_i^{(1)}$ de las ecuaciones (3.15), (3.24) respectivamente y teniendo en cuenta la suposición que $v_i^{(1)} = 0$ se obtiene,

$$\frac{\partial(1-n)\rho_s}{\partial t} + \text{div}((1-n)\rho_s \cdot 0) = \frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.42)$$

al operar el término de la izquierda y reorganizar se obtiene

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \frac{\partial n \rho_s}{\partial t} + 0 = \frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.43)$$

la densidad de los sólidos se considera $\rho_s = \text{constante}$, es decir que no cambia en el tiempo, por esto se llega a la expresión final para la ecuación de balance de masa de la fase sólida llamada ecuación de balance de masa 1 ó ecuación de continuidad para los sólidos dada por,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{\rho_s dV} \quad (3.44)$$

3.3.3.2. Ecuación de balance de masa de la fase de partículas sólidas en suspensión en el fluido

Para un elemento de volumen representativo EVR compuesto por las tres fases (s, f, fs), se puede escribir una ecuación de balance de masa para la fase de las partículas sólidas en suspensión en el fluido utilizando la ecuación (3.40), cuando $k = 3$

$$\frac{\partial \rho^{(3)}}{\partial t} + \text{div} \left(\rho^{(3)} v_i^{(3)} \right) = -\frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.45)$$

el término de la derecha de la ecuación es el inverso de la tasa de masa producida por unidad de volumen, es decir toda la masa que entra a la fase (3) (partículas sólidas en suspensión en el fluido) proviene de la masa erosionada del esqueleto sólido. Al remplazar $\rho^{(3)}$ de la ecuación (3.17) se obtiene

$$\frac{\partial cn \rho_s}{\partial t} + \text{div} \left(cn \rho_s \cdot v_i^{(3)} \right) = -\frac{\dot{m}}{dV} \quad (3.46)$$

teniendo las ecuaciones (3.36) y (3.37) de los flujos parciales $q_i^{(2)}$ y $q_i^{(3)}$, y combinandolas con la ecuación (3.38) del flujo específico relativo q_i de la mezcla partículas sólidas en suspensión-fluido, y considerando la suposición que $v_i^{(3)} = v_i^{(2)}$ se obtienen las siguientes expresiones

$$q_i = n v_i^{(3)} = n v_i^{(2)} = \frac{q_i^{(2)}}{(1-c)} \quad (3.47)$$

$$q_i^{(3)} = c n v_i^{(3)} = c q_i. \quad (3.48)$$

reemplazando (3.48) en (3.46) y factorizando ρ_s se puede escribir,

$$\frac{\partial cn}{\partial t} + \text{div} (c q_i) = -\frac{\dot{m}}{\rho_s dV} \quad (3.49)$$

de la ecuación (3.44) de balance de masa 1 se tiene que $\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\dot{m}}{\rho_s dV}$ al remplazar esto en (3.49) y reorganizando los términos se tiene,

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial cn}{\partial t} = \frac{\partial(1-c)n}{\partial t} = \text{div} (c q_i) \quad (3.50)$$

con el uso de la ecuación (3.48) se puede expresar en términos del flujo específico relativo ó del flujo específico relativo parcial de la fase de partículas sólidas en suspensión en fluido

como,

$$\frac{\partial(1-c)n}{\partial t} = \text{div}(cq_i) = \text{div}(q_i^{(3)}) \quad (3.51)$$

la cual es la expresión final para la ecuación de balance de masa de las partículas sólidas en suspensión en el fluido.

3.3.3.3. Ecuación de balance de masa para la fase fluida

Para un elemento de volumen representativo EVR compuesto por las tres fases (s, f, fs), se puede escribir una ecuación de balance de masa para la fase fluida utilizando la ecuación (3.40) cuando ($k = 2$),

$$\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial t} + \text{div}(\rho^{(2)} v_i^{(2)}) = 0 \quad (3.52)$$

el término de la derecha es cero debido a que no hay producción de masa para esta fase debido a la erosión con respecto al tiempo, al remplazar $\rho^{(2)}, v_i^{(2)}$ en la ecuación (3.52) se obtiene,

$$\frac{\partial(1-c)n\rho_f}{\partial t} + \text{div}((1-c)n\rho_f v_i^{(2)}) = 0 \quad (3.53)$$

al remplazar el término $q_i = n v_i^{(2)}$ dado por la ecuación (3.38) en (3.53) se obtiene,

$$\frac{\partial(1-c)n\rho_f}{\partial t} + \text{div}((1-c)\rho_f \cdot q_i) = 0 \quad (3.54)$$

al factorizar ρ_f este término se elimina y remplazando la ecuación de balance de masa de las partículas sólidas en suspensión en el fluido $\frac{\partial(1-c)n}{\partial t} = \text{div}(cq_i)$ en (3.54) se obtiene

$$\text{div}(cq_i) + \text{div}(q_i) - \text{div}(cq_i) = 0 \quad (3.55)$$

finalmente se llega a la ecuación de balance de masa para la fase fluida conocida también como ecuación de continuidad para el flujo de partícula-fluido

$$\text{div}(q_i) = 0 \quad (3.56)$$

3.4. Ley constitutiva de erosión

Las tres ecuaciones (3.44), (3.51) y (3.56) descritas anteriormente son las ecuaciones de balance de masa para cada una de las fases del medio trifásico. Estas ecuaciones obedecen a las suposiciones de las velocidades de los componentes de cada fase. Estas conforman un

sistema de ecuaciones donde se encuentran, la porosidad n del material, la concentración de las partículas en suspensión en el fluido c y la tasa de masa producida por unidad de volumen $\frac{\dot{m}}{dV}$, las cuales son las incógnitas independientes. Para solucionar este sistema de ecuaciones que describe el comportamiento erosivo del medio es necesario una ecuación adicional. Esta ecuación se propone en forma de ley constitutiva de erosión o ley evolutiva de erosión. En el estudio del fenómeno de producción de arena para describir el comportamiento erosivo del medio poroso y el mecanismo de erosión se han formulado distintas leyes constitutivas, dependiendo de la física del problema y del grado de entendimiento del mismo. Los autores I. Vardoulakis y E. Papamichos han desarrollado diferentes leyes de erosión como la ecuación (3.57), presentada en el artículo [9], esta es una ley constitutiva para la tasa de la masa erosionada, en la que se propone que la erosión es manejada por la descarga de partículas fluidizadas, $c\bar{q}_i$ y está dada por:

$$\frac{j^{(3)}}{\rho_s} = \lambda(1 - n)c \left(1 - \frac{c}{c_{cr}}\right) \|q_i\| \quad (3.57)$$

donde el término c_{cr} es un valor crítico adimensional de la concentración de partículas fluidizadas en la mezcla c , para el cual los dos fenómenos presentes (erosión y depositación) se balancean entre uno y otro. El coeficiente λ con unidad inversa a la longitud se relaciona con la frecuencia espacial de los puntos de inicio de la erosión en el esqueleto sólido del medio poroso y debe ser determinado de manera experimental. En caso de acople entre el proceso de la erosión y la falla mecánica de la roca, se espera que λ este en función de aumento al daño de la roca.

La ley constitutiva de erosión (3.58) propuesta por Papamichos y Vardoulakis en el año de 2003, presentada en el artículo [4], a manera de ley de difusión de la porosidad, se explicará en detalle en este capítulo y se propone como ley constitutiva de erosión para el presente modelo de erosión.

$$\frac{\dot{m}}{\rho_s dV} = \lambda \frac{\partial^2 n}{\partial x_i^2} \quad (3.58)$$

3.4.1. Ley constitutiva de erosión como modelo de difusión de la porosidad

Este modelo constitutivo describe el comportamiento erosivo en un medio monodisperso como el opuesto a la filtración de granos finos en una matriz gruesa. Basado en el artículo “Sand erosion with a porosity diffusion law” [4] de I. Vardoulakis y E. Papamichos. Las teorías con las que se desarrolló la ley están basadas en datos de laboratorios. La ecuación

de balance de masa para la descarga (flujo) de partículas en suspensión en el fluido (3.50), que son las mismas partículas que fueron erosionadas de la matriz sólida del medio está dada por,

$$\frac{\partial(1-c)n}{\partial t} = \text{div}(cq_i) = \text{div}\left(q_i^{(3)}\right) \quad (3.59)$$

y establece que todos los cambios de la porosidad n en un volumen del material es debido al transporte neto de granos afuera de este volumen. El modelo utilizado para la descarga de partículas erosionadas es una ley gradiente que obliga a las partículas a salir de las regiones donde la porosidad crece y toma la siguiente forma,

$$q_i^{(3)} = \lambda \frac{dn}{dx_i} \quad (3.60)$$

esta ecuación se puede interpretar como una ley de bombeo la cual obliga a las líneas de flujo de las partículas erosionadas a seguir el gradiente de porosidad. Al remplazar la ecuación (3.59) en (3.60) se puede escribir la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial(1-c)n}{\partial t} = \text{div}\left(\lambda \frac{\partial n}{\partial x_i}\right) = \lambda \frac{\partial^2 n}{\partial x_i^2} \quad (3.61)$$

considerando que la concentración de las partículas en suspensión es muy pequeña, $c \ll 1$, se tiene una expresión para la ley de erosión de difusión de la porosidad dada por la ecuación (3.62),

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 n}{\partial x_i^2} \quad (3.62)$$

donde λ es un parámetro con dimensiones $\left[\frac{L^2}{t}\right]$ de longitud al cuadrado sobre tiempo y es llamado el coeficiente de difusividad de porosidad. Este modelo es capaz de desacoplar la porosidad n de las ecuaciones de balance de masa y por esto el problema puede ser resuelto de manera analítica para una determinada geometría, condiciones de borde iniciales y condiciones iniciales propias de la naturaleza del problema.

3.5. Ley de gobierno para flujo de fluido en medios porosos

Un flujo estable unidimensional de un fluido incompresible y viscoso a través de los espacios de los poros interconectados de un medio poroso isotrópico y homogéneo puede ser descrito por la ley de Darcy. Esta ley relaciona el vector de descarga específica (flujo) q_i con el gradiente i , de la cabeza piezométrica Φ . El caudal total de fluido Q que fluye por los poros puede ser expresado como el producto entre la velocidad del fluido v y el área de

los poros transversal al flujo A como,

$$Q = vA \quad (3.63)$$

según la ley de Darcy la velocidad v del fluido esta dada por,

$$v = k_w i \quad (3.64)$$

donde i es el gradiente hidráulico ó gradiente de la cabeza piezométrica y k_w es la conductividad hidráulica con dimensiones $[\frac{L}{T}]$, la cual mide la permeabilidad del esqueleto sólido con respecto al agua. La descarga específica de fluido q es el caudal total Q dividido entre A y se puede escribir como,

$$q = \frac{Q}{A} \quad (3.65)$$

al combinar (3.63) y (3.64) en (3.65), se puede escribir la siguiente ecuación,

$$q = k_w i \quad (3.66)$$

el vector de descarga específica \vec{q} se puede escribir en notación indicial como,

$$\vec{q} = q\hat{e}_i = q_i \quad (3.67)$$

Según la figura (3.5) la cabeza piezométrica Φ se define como,

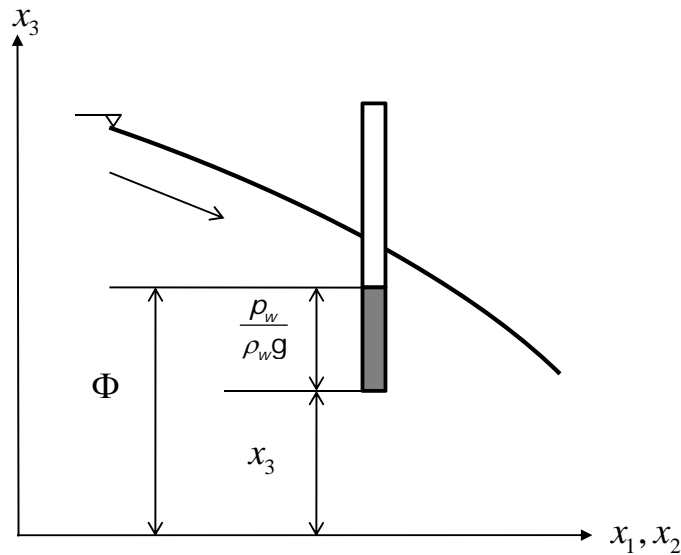


Figura 3.5: Altura piezométrica

$$\Phi = \frac{p_w}{\gamma_w} + x_3 = \frac{p_w}{\rho_w g} + x_3 = \frac{p_w + x_3 \rho_w g}{\rho_w g} \quad (3.68)$$

donde p_w es la presión de fluido en los poros (presión de poros), γ_w es la gravedad específica del fluido, ρ_w es la densidad del fluido, y g es la gravedad. En el eje vertical $\hat{e}_3(x_3)$ de la figura (3.5) la fuerza de gravedad g_i de un cuerpo pueden expresarse como

$$g_i = \vec{g} = -g\hat{e}_3 = -g\delta_{i3} \quad (3.69)$$

La figura (3.6) muestra el gradiente hidráulico ó gradiente de cabeza piezométrica i que esta dado por,

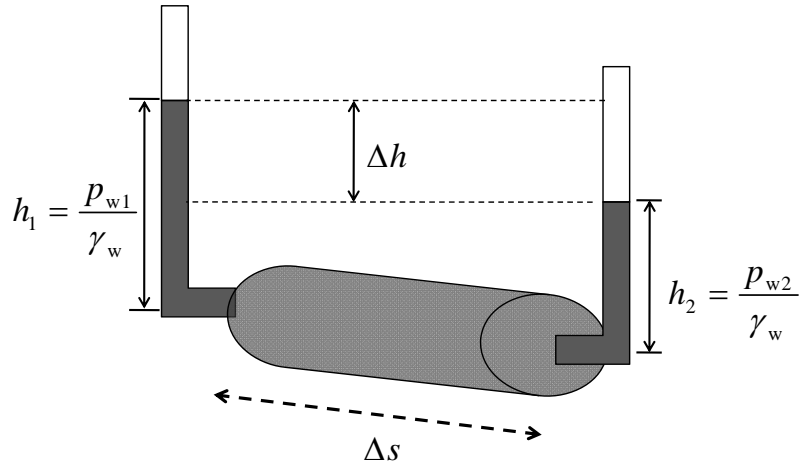


Figura 3.6: Gradiente hidráulico

$$i = \frac{\Delta h}{\Delta s} = \frac{\partial \Phi}{\partial i} \quad (3.70)$$

donde Δh es la diferencia entre las alturas h_1 y h_2 . Estas alturas en términos de la presión de poros se pueden escribir como, $h_1 = \frac{p_{w1}}{\gamma_w}$ y $h_2 = \frac{p_{w2}}{\gamma_w}$, Δs es la distancia que el fluido tiene que recorrer a traves del medio, remplazando (3.68) en (3.70) se obtiene,

$$i = \frac{h_1 - h_2}{\Delta s} = \frac{p_{w1} - p_{w2}}{\Delta s \gamma_w} = \frac{\partial \Phi}{\partial i} \quad (3.71)$$

teniendo en cuenta que el sentido del flujo es contrario al aumento del eje vertical \hat{e}_3 y al combinar las ecuaciones (3.66), (3.67), (3.68) y (3.70), la ley de Darcy se puede escribir como,

$$q_i = -k_w \partial_i \Phi = -k_w \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.72)$$

entre las ecuaciones (3.73) y (3.76) se muestra la solución de la derivada parcial de la cabeza hidráulica Φ con respecto a x_i ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p_w + x_3 \rho_w g}{\rho_w g} \right), \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_w g} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x_i} + \frac{\partial x_3}{\partial x_i} \rho_w g \right), \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_w g} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x_i} + \delta_{3i} \rho_w g \right), \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho_w g} (\partial_i p_w - \rho_w g_i) \quad (3.76)$$

al remplazar la ecuación (3.76) en la ecuación de la ley de Darcy (3.72), esta se puede escribir como,

$$q_i = k_w \frac{1}{\rho_w g} (-\partial_i p_w + \rho_w g_i) \quad (3.77)$$

La ley de Darcy puede usarse para identificar la fuerza de infiltración \hat{f}_i , para esto se utilizan las siguientes ecuaciones de equilibrio,

$$\partial_k \sigma_{ki} + \rho g_i = 0 \quad (3.78)$$

$$\partial_k \sigma'_{ki} + \rho_b g_i + \hat{f}_i = 0 \quad (3.79)$$

$$-\partial_i p_w + \rho_w g_i - \hat{f}_i = 0 \quad (3.80)$$

donde ρ_b es la densidad sumergida del esqueleto sólido de un medio de dos fases (liquida y solida) dada por,

$$\rho_b = \rho - \rho_w = (1 - n)\rho_s + n\rho_w - \rho_w = (1 - n)(\rho_s - \rho_w) \quad (3.81)$$

combinando la ecuación (3.77) con la ecuación de equilibrio (3.80) para la fase liquida, se puede obtener una ley constitutiva para la fuerza de infiltración que esta dada por,

$$\hat{f}_i = f q_i \quad (3.82)$$

donde f es un coeficiente de proporcionalidad y esta dado por,

$$f = \frac{\rho_w g}{k_w} \quad (3.83)$$

de la ecuación (3.82) para la fuerza de infiltración, se deduce que el arrastre ejercido por el flujo de fluido sobre los granos del esqueleto rígido es proporcional al movimiento relativo

del fluido con respecto a los granos y el coeficiente de proporcionalidad f es inversamente proporcional a la permeabilidad del suelo. Desde el punto de vista mecánico se puede introducir de manera indirecta la ley de Darcy de la ecuación (3.77), al combinar la ecuación (3.80) para la fase líquida y la ley constitutiva de (3.82) para la fuerza de arrastre. El coeficiente de permeabilidad k_w de la ecuación (3.83) está relacionado con la permeabilidad de Muskat o física k de el medio de acuerdo a la relación propuesta por Taylor (1948),

$$k_w = \frac{g}{\eta_k} k \quad (3.84)$$

combinando (3.83) con (3.84) se obtiene,

$$f = \frac{\rho_w \eta_k}{k} \quad (3.85)$$

donde η_k es la viscosidad cinemática del agua ($\eta_k = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ seg}^{-1}$ a 20°), de acuerdo a esto f es llamado el coeficiente de arrastre viscoso. En la ecuación (3.85) k es la permeabilidad física y tiene unidades de superficie, esto significa que esta es una medida del área de la sección transversal de los canales microscópicos de los espacios vacíos interconectados (poros), k usualmente es medida en milidarcys ($1 \text{ md} = 0,987 \times 10^{-15} \text{ m}^2$). Para estimar el coeficiente de permeabilidad k_w en arenas la regla empírica de Hazen es utilizada para dar una aproximación,

$$k_w = 100 D_{10\%}^2 \quad (3.86)$$

en la cual $D_{10\%}$ es el diametro efectivo del grano de Hazen con unidades de (cm) y k_w con unidades de ($\text{cm} \times \text{seg}^{-1}$), un ejemplo tomado del libro [15], dice que para un arena fina con $D_{10\%} = 0,0125 \text{ cm}$ y el coeficiente $k_w = 156 \times 10^4 \text{ cm/seg}$, utilizando las ecuaciones (3.84) y (3.85) se puede obtener los valores para la permeabilidad física $k = 15,9 \times 10^{-6} \text{ mm}^2 = 16,1 \text{ d}$ y para el coeficiente de arrastre viscoso $f = 6,29 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3} \text{ seg}^{-1}$. Si se considera que el gradiente de la cabeza de la elevación es poco importante entonces se tiene que, $\rho_w g_i = 0$, y remplazando esto y la definición de f dada por la ecuación (3.83) en la ley de Darcy de la ecuación (3.77), esta toma la siguiente forma,

$$q_i = -\frac{1}{f} \partial_i p_w, \quad (3.87)$$

combinando la ecuación (3.85) con (3.87) se obtiene,

$$q_i = -\frac{k}{\rho_w \eta_k} \partial_i p_w, \quad (3.88)$$

al multiplicar la viscosidad cinemática de un fluido η_k por su densidad ρ_w , se obtiene la viscosidad absoluta o dinámica η del fluido. Un ejemplo para el agua, (valores de $\eta_k =$

$1,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{seg}^{-1}$ a 20° y $\rho_w = 1\text{kg/m}^3$) al operar se obtiene,

$$\eta_k \times \rho_w = \eta = 1\text{kg/ms} = 1\text{cp}$$

por esto, la ecuación (3.88) se puede escribir en terminos de la viscosidad absoluta o dinámica del fluido como,

$$q_i = -\frac{k}{\eta} \partial_i p_w. \quad (3.89)$$

la ecuación (3.89), es llamada ley de Darcy.

3.5.1. Ley de permeabilidad

La siguiente ley de permeabilidad describe la dependencia que tiene la permeabilidad de la roca con respecto a los cambios en su porosidad, por medio de la ecuación de Carman-Kozeny. Con esta se puede calcular cuales son los cambios de la permeabilidad del material en las zonas erosionadas como una función de la porosidad.

La permeabilidad física del suelo k puede expresarse como proporcional al diámetro medio de los granos de la regla de Hazen (3.86) como,

$$k = \frac{1}{c_1} \frac{n^3}{(1-n)^2} D_{50\%}^2 \quad (3.90)$$

donde se evidencia la dependencia de k con la porosidad, la ecuación (3.90) es conocida con la ecuación Karman-Kozeny, en la cual la c_1 es una constante y esta dada por

$$c_1 = c_0 S_{vp} \quad (3.91)$$

donde el término $S_{vp} = (2/R_H)$ es la superficie especifica de los poros, definida como la relación entre la superficie de los poros y el volumen de los poros, en donde R_H es el radio hidráulico de los poros y esta dado por la formula de Kozeny en términos del diámetro medio de los granos $D_{50\%}$ y la relación de vácios,

$$R_H = \frac{e D_{50\%}}{6} \quad (3.92)$$

a su vez, el término c_0 en la ecuación (3.91) es llamado la constante de Kozeny, a la cual Carman le asigno el valor $c_0 = 5$. Según Vardoulakis(1995)[15], Bear(1972) indicó que

Irman adoptó un valor para $c_1 = 180$, al definir e introducir el término k_c como y remplazar,

$$k_c = \frac{D_{50\%}^2}{c_1}, \quad k_c = \frac{D_{50\%}^2}{180} \quad (3.93)$$

y remplazando K_c en la ecuación de Carman-Kozeny (3.90) se obtiene

$$k = kc \frac{n^3}{(1-n)^2} \quad (3.94)$$

que es una ecuación permite variar la permeabilidad de Mustak ó física k de un medio poroso con respecto a la porosidad n , de la cual se evidencia que el termino k_c es una constante del material, ya que depende de la c_1 considerado como una constante y del $D_{50\%}$ que es uno para cada tipo de material. La ecuación (3.94) es llamada la ecuación Carman-Kozeny.

Capítulo 4

Modelo Poro-Mecánico de Producción de Arena

Ecuaciones Constitutivas

En yacimientos de arenisca durante la producción de petróleo se pueden presentar problemas de estabilidad de pozo. Según [11] las rocas que conforman un yacimiento son usualmente débiles y presentan una porosidad que varía entre (10 % – 30 %). La roca (el material del yacimiento) puede estar expuesto a esfuerzos medios relativamente bajos en comparación con altos valores del esfuerzo desviador, debido a la concentración de esfuerzos alrededor de la superficie del pozo. Según [8] el comportamiento mecánico de la arenisca por ser un material que presenta elasticidad, fricción interna, cohesión y dilatancia, puede ser descrito basándose en la teoría de la elastoplasticidad.

4.1. Conceptos básicos de elasticidad y plasticidad

Según [8] la deformación elástica de las areniscas es caracterizada por la acción de dos mecanismos, el aumento en el esfuerzo que puede soportar la roca debido al “healing”, que es debido al cierre de las micro fracturas preexistentes. Esto fue observado claramente en los dos primeros ciclos de descarga y recarga en ensayos triaxiales, según [8] como un aumento neto del módulo secante de corte correspondiente y usualmente es llamado efecto de rigidización por esfuerzo. Por otra parte la deformación de la roca conlleva al daño de esta, que es la creación aparición de nuevas micro-fracturas, esto fue observado en los últimos ciclos de descarga y recarga como un decrecimiento neto en el módulo secante

de corte y es llamado efecto de daño por deformación. Estos dos efectos se presentan de manera simultanea y deben ser considerados para la evaluación apropiada de la propiedades elásticas del material.

Para introducir un comportamiento elastoplástico del material poroso, que contiene el fluido (en este caso petróleo) se parte de los conceptos básicos de elasticidad y plasticidad. En un medio granular el esfuerzo σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) es usado como una medida apropiada del **esfuerzo intergranular**. Para un medio granular saturado, con presencia de una presión de fluido $p_f > 0$ el esfuerzo intergranular es aproximado por el esfuerzo efectivo de **Terzaghi**,

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_f \delta_{ij} \quad (4.1)$$

De acuerdo con ésto el comportamiento, del esqueleto solido, denominado usualmente como comportamiento drenado es descrito aquí en términos del tensor de esfuerzos efectivos de Cauchy σ'_{ij} . El tensor de esfuerzos σ'_{ij} y su tasa $\dot{\sigma}'_{ij}$ son descompuestos en una parte desviadora σ'^D_{ij} , $\dot{\sigma}'^D_{ij}$ y una parte esférica σ'^K_{ij} , $\dot{\sigma}'^K_{ij}$. De acuerdo con ésto el tensor de esfuerzos efectivos puede escribirse como

$$\sigma'_{ij} = \sigma'^D_{ij} + \sigma'^K_{ij}, \quad (4.2)$$

en donde:

$$\sigma'^D_{ij} = \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \sigma'_{ii} \delta_{ij}, \quad (4.3)$$

y

$$\sigma'^K_{ij} = \frac{1}{3} \sigma'_{ii} \delta_{ij}, \quad (4.4)$$

con $\sigma'_{ii} = s$ como la suma de los esfuerzos normales. Reemplazando (4.4) en la ecuación (4.2), esta se puede escribir como,

$$\sigma'_{ij} = \sigma'^D_{ij} + \frac{1}{3} \sigma'_{ii} \delta_{ij}. \quad (4.5)$$

De la misma manera la tasa del tensor de esfuerzos efectivos puede escribirse como

$$\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}'^D_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\sigma}'_{ii} \delta_{ij} \quad (4.6)$$

Análogamente, la tasa del tensor de deformación $\dot{\epsilon}_{ij}$ de un continuo elásto-plástico puede descomponerse en una parte elástica $\dot{\epsilon}^e_{ij}$ y una parte plástica $\dot{\epsilon}^p_{ij}$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}^e_{ij} + \dot{\epsilon}^p_{ij}. \quad (4.7)$$

El tensor $\dot{\epsilon}_{ij}$ puede descomponerse, a su vez, en una parte desviadora $\dot{\epsilon}^D_{ij}$ y en una parte

esférica $\dot{\varepsilon}_{ij}^K$, y escribirse de forma similar al tensor de esfuerzos de la ecuación (4.6):

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^D + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{ii} \delta_{ij}, \quad (4.8)$$

en donde

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^D = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{ii} \delta_{ij}, \quad (4.9)$$

y

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^K = \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{ii} \delta_{ij}, \quad (4.10)$$

con $\dot{\varepsilon}_{ii} = e$ como la deformación volumetrica (suma de las componentes de la diagonal del tensor de deformación). Combinando las ecuaciones (4.7) y (4.8) la tasa del tensor de deformaciones puede escribirse como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{D(\alpha)} + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{ii}^{(\alpha)} \delta_{ij} \quad (\alpha = e, p). \quad (4.11)$$

por simplicidad se supone que la tasa de deformación elástica está relacionada con la tasa de esfuerzos a través de la ecuación de elasticidad isotrópica lineal:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (4.12)$$

en donde el tensor elástico isotrópico C_{ijkl}^e puede expresarse como,

$$C_{ijkl}^e = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (4.13)$$

$$C_{ijkl}^e = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + G\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (4.14)$$

con,

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.15)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G\frac{2\nu}{1-2\nu} \quad (4.16)$$

donde λ y μ son las constantes de Lamé, combinando las ecuaciones (4.15) y (4.16) el tensor C_{ijkl}^e se puede escribir,

$$C_{ijkl}^e = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (4.17)$$

Si el tensor isotrópico, se define como:

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (4.18)$$

y el tensor unitario como:

$$\mathbf{1} = 1\delta_{ij}\delta_{kl} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad (4.19)$$

el tensor elástico isotrópico puede escribirse como:

$$C_{ijkl}^e = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\lambda + 2\mu\mathbf{I}. \quad (4.20)$$

G y ν son el modulo elástico de corte y la relación de Poisson respectivamente. De manera alterna se pueden introducir los módulos elásticos de corte y compresión, los cuales relacionan las partes desviadoras y esféricas de los tensores correspondientes:

$$\dot{\sigma}_{ii} = 3K \dot{\varepsilon}_{kk}^e \quad (4.21)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^D = 2G \dot{\varepsilon}_{ij}^D \quad (4.22)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (4.23)$$

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (4.24)$$

$$\frac{K}{G} = \frac{2(1-\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (4.25)$$

Las deformaciones plásticas son asociadas usualmente con una función de potencial plástico en el estado de esfuerzos:

$$Q = Q(\sigma_{ij}, \psi) \quad (4.26)$$

la cual se considera como una función isotrópica del tensor de esfuerzos,

En el argumento de Q , ψ significa un parámetro de endurecimiento, es decir, una medida de la deformación plástica. La regla de flujo de la teoría de plasticidad se obtiene entonces como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi}; \quad (\dot{\psi} \geq 0) \quad (4.27)$$

esta regla de flujo de la ecuación (4.27), es denominada como regla de flujo co-axial para denotar que los ejes principales de la tasa de la deformación plástica coinciden con los ejes principales de los esfuerzos. la desigualdad $\dot{\psi} \geq 0$ es esencial para la elastoplasticidad y define el carácter irreversible de las deformaciones plásticas.

en la figura (4.1) se observa la superficie de fluencia $F(\sigma_{ij}, \psi) = 0$ y la superficie del potencial plástico $Q(\sigma_{ij}, \psi) = 0$, en el espacio de esfuerzos,

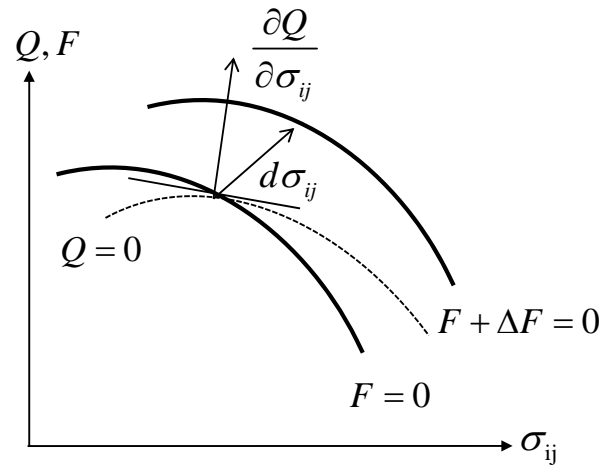


Figura 4.1: Superficie de fluencia y potencial plástico

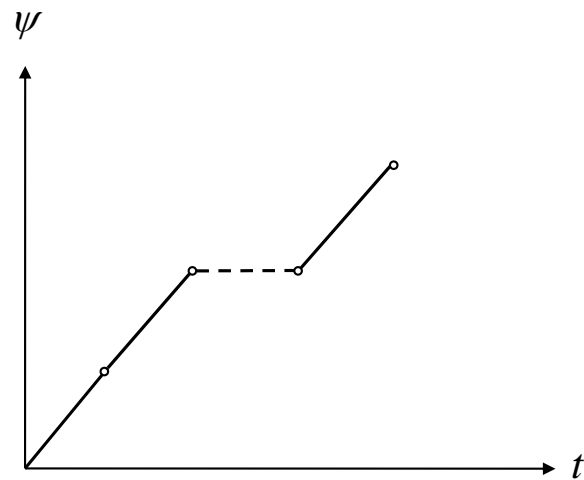


Figura 4.2: Discontinuidad con el tiempo

El comportamiento del material se supone “local” e “independiente” de la velocidad. La primera suposición significa que para un punto material x_k fijo en el espacio ψ depende únicamente del tiempo. La independencia de la velocidad implica que ψ y el tiempo t son simplemente dos miembros equivalentes de una clase de parámetros los cuales pueden ser usados para identificar el estado de deformación plástica. Aunque el tiempo real fluye continuamente, el tiempo intrínseco (enocronico) de la teoría de la plasticidad fluye únicamente siempre que se presenta deformación plástica adicional. La variación de ψ con respecto al tiempo real puede ser discontinua pero nunca discreta. Bajo estas suposiciones ψ puede identificarse como una medida acumulativa de deformación plástica.

$$\psi = \int_0^t \dot{\psi} dt = \int_0^0 d\psi \quad (4.28)$$

4.2. Modelo constitutivo elástico incremental no lineal dependiente del esfuerzo

La tasa de deformación elástica de un material isotrópico se relaciona con la tasa de esfuerzos por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \quad (4.29)$$

que es llamada ecuación de elasticidad isotrópica lineal donde \mathbf{C}^e es el tensor elástico isotropico. Para la elasticidad independiente del esfuerzo, la tasa de esfuerzos está dada por siguiente ecuación,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G_s \left[\boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \mathbf{1} \right] \quad (4.30)$$

y para la la elasticidad dependiente del esfuerzo la tasa de esfuerzos está definida por la ecuación (4.31) donde aparece el término adicional $\frac{\dot{G}_s}{G_s} \boldsymbol{\sigma}_e$ como,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2G_s \left[\boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \mathbf{1} \right] + \frac{\dot{G}_s}{G_s} \boldsymbol{\sigma}_e \quad (4.31)$$

a continuación esta ecuación sera desarrollada y en el apéndice (A) se explica el esfuerzo equivalente σ_e .

El tensor de esfuerzos σ_{ij} puede descomponerse en una parte esférica y una parte

desviadora y se puede escribir como,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma^{esf} + \sigma^{des} \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{3}\sigma_{kk} + \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right)\end{aligned}\quad (4.32)$$

al definir el esfuerzo medio p y el esfuerzo desviador S_{ij} como,

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (4.33)$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (4.34)$$

la ecuación (4.32) se puede escribir de la siguiente manera en terminos de p y S_{ij} ,

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + S_{ij}. \quad (4.35)$$

Según [8] un comportamiento elástico en materiales granulares como las areniscas comúnmente observado, es un comportamiento elástico dependiente del esfuerzo, por esto, el modulo elástico de corte G se propone como dependiente del esfuerzo medio p y de la segunda invariante del tensor de esfuerzo desviador T ,

$$G = G(p, T) \quad (4.36)$$

$$\text{donde, } p = \frac{S_{ij}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \quad T = \sqrt{\frac{S_{ij}S_{ij}}{2}}$$

El modulo de corte G con este tipo de dependencia puede describir inicialmente una curva esfuerzo-deformación de forma convexa y creciente atribuida al cierre de las grietas. Con el fin de introducir una dependencia del esfuerzo a los parámetros elásticos, se asume que el material propuesto(roca arenisca) tiene una elasticidad hiper-elástica. La figura (4.3) muestra el espacio esfuerzo-deformación en la cual el área bajo la curva es el trabajo realizado para una deformación ε^e determinada, el complemento del área formada por ε^e con su correspondiente esfuerzo es llamado el trabajo complementario w^c . Para un elemento diferencial dw^c se cumple que,

$$dw^c = \varepsilon_{ij}^e d\sigma_{ij} \quad (4.37)$$

teniendo en cuenta que el trabajo complementario w^c es integrable por ser independiente

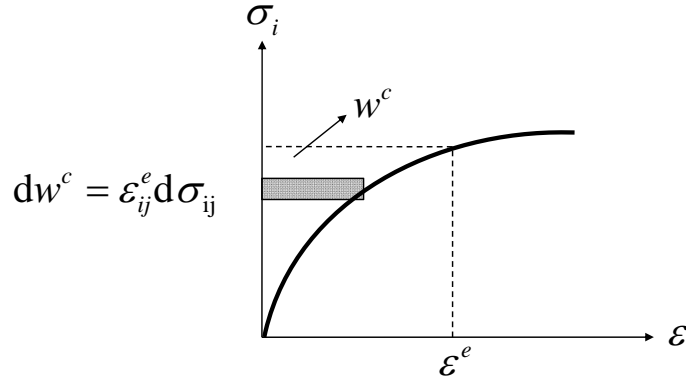


Figura 4.3: trabajo complementario

de la trayectoria se obtiene,

$$w^c = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij}^e d\sigma_{ij} \quad (4.38)$$

la cual es llamada función de densidad de energía complementaria ó trabajo complementario. w^c puede ser visto como una función potencial del esfuerzo para las deformaciones elásticas como,

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{\partial w^c}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.39)$$

la existencia de la función de densidad de energía complementaria o de trabajo complementario descrita anteriormente muestra que en un ciclo elástico cerrado, no se acumula, no se produce ni se disipa energía.

Para la elasticidad isotrópica, en la que el material tiene las mismas propiedades elásticas en todas las direcciones, el trabajo complementario w^c está en función de las invariantes independientes del tensor de esfuerzos $I_{1\sigma}, I_{2\sigma}^*, I_{3\sigma}^*$ por,

$$w^c = w^c(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}^*, I_{3\sigma}^*) \quad (4.40)$$

cada invariante está definida como,

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = p \\ I_{2\sigma}^* &= \frac{S_{ij}S_{ij}}{2} \\ I_{3\sigma}^* &= \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{3} \end{aligned} \quad (4.41)$$

al resolver la ecuación (4.40) aplicando el teorema de Cayley-Hamilton se obtiene,

$$\varepsilon_{ij}^e = a_1 \delta_{ij} + a_2 S_{ij} + a_3 S_{ik} S_{kj} \quad (4.42)$$

conocida como la **“Ecuación general elástica no lineal”**, esta ecuación garantiza la reversibilidad de las deformaciones porque $\varepsilon_{ij}^e f(\sigma_{ij})$, la ecuación está expresada en términos de los coeficientes $a_1 = \frac{\partial w^c}{\partial I_{1\sigma}}$, $a_2 = \frac{\partial w^c}{\partial I_{2\sigma}^*}$, $a_3 = \frac{\partial w^c}{\partial I_{3\sigma}^*}$, estos coeficientes están en función de las invariantes de esfuerzos,

$$a_i = a_i(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}^*, I_{3\sigma}^*) \quad (4.43)$$

los coeficientes a_1 y a_2 pueden ser escritos en terminos del modulo secante elástico de compresión K_s y el modulo secante elástico de corte G_s respectivamente. El coeficiente a_3 es asumido como cero, al no tenerse aún suficientes datos experimentales para determinar la influencia de la tercera invariante de esfuerzos $I_{3\sigma}^*$.

$$a_1 = \frac{I_{1\sigma}}{3K_s}, \quad (4.44)$$

$$a_2 = \frac{1}{2G_s}, \quad (4.45)$$

$$a_3 = 0 \quad (4.46)$$

a su vez, estos módulos están en función de las invariantes de esfuerzos $K_s = K_s(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}^*)$ y $G_s = G_s(I_{1\sigma}, I_{2\sigma}^*)$.

reemplazando los coeficientes a_1, a_2, a_3 en la ecuación general elástica no lineal (4.42) se obtiene,

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{p}{3K_s} \delta_{ij} + \frac{1}{2G_s} S_{ij} \quad (4.47)$$

De la misma manera que el tensor de esfuerzos σ_{ij} , el tensor de deformación elástica ε_{ij}^e se puede descomponer en un parte esférica y una parte desviadora,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= \varepsilon^{esf} + \sigma^{des} \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + \left(\varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} e^e \delta_{ij} \right) && \text{donde, } \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} = e^e \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{3} e^e \delta_{ij} + \left(\varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} e^e \delta_{ij} \right) && \text{donde, } \left(\varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} e^e \delta_{ij} \right) = e_{ij}^e \\ \varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{3} e^e \delta_{ij} + e_{ij}^e \end{aligned} \quad (4.48)$$

combinando las ecuaciones (4.47) con (4.48) se obtiene la ecuación,

$$\frac{1}{3}e^e\delta_{ij} + e_{ij}^e = \frac{p}{3K_s}\delta_{ij} + \frac{1}{2G_s}S_{ij} \quad (4.49)$$

se igualan las partes esféricas y desviadoras de esta ecuación por separado y se obtiene,

$$\frac{1}{3}e^e\delta_{ij} = \frac{p}{3K_s}\delta_{ij}, \Rightarrow e^e = \frac{p}{K_s} \quad \text{parte esferica} \quad (4.50)$$

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2G_s}S_{ij} \quad \text{parte desviadora} \quad (4.51)$$

al despejar el esfuerzo medio p y el esfuerzo desviador S_{ij} en terminos de modulo secante elástico de compresión K_s y el modulo secante elástico de corte G_s respectivamente se pueden escribir al igual que sus tasas como,

$$p = e^e K_s \quad \dot{p} = \dot{e}^e K_s + e^e \dot{K}_s \quad (4.52)$$

$$S_{ij} = 2e_{ij}^e G_s \quad \dot{S}_{ij} = 2G_s \dot{e}_{ij}^e + 2e_{ij}^e \dot{G}_s \quad (4.53)$$

al remplazarlos terminos e^e y e_{ij}^e en las ecuaciones (4.52) y (4.53) respectivamente, se obtiene,

$$\dot{p} = \dot{e}^e K_s + p \left(\frac{\dot{K}_s}{K_s} \right) \quad (4.54)$$

$$\dot{S}_{ij} = 2G_s \dot{e}_{ij}^e + S_{ij} \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \quad (4.55)$$

de acuerdo la ecuación (4.35) el tensor de esfuerzos σ_{ij} y su tasa $\dot{\sigma}_{ij}$ se pueden escribir como,

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (4.56)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{p}\delta_{ij} + \dot{S}_{ij} \quad (4.57)$$

reemplazando las tasas \dot{p} y \dot{S}_{ij} en la ecuación (4.57) se puede escribir la expresión,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{e}^e K_s \delta_{ij} + p \left(\frac{\dot{K}_s}{K_s} \right) \delta_{ij} + 2G_s \dot{e}_{ij}^e + S_{ij} \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \quad (4.58)$$

si se tiene que e_{ij}^e y su tasa \dot{e}_{ij}^e están dados por,

$$e_{ij}^e = \left(\varepsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} e^e \delta_{ij} \right) \quad (4.59)$$

$$\dot{e}_{ij}^e = \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{e}^e \delta_{ij} \right) \quad (4.60)$$

combinando las ecuación (4.60) con la ecuación (4.58) se puede escribir una expresión para la tasa de esfuerzo como,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{e}^e \delta_{ij} \right) + \dot{e}^e K_s \delta_{ij} + p \left(\frac{\dot{K}_s}{K_s} \right) \delta_{ij} + S_{ij} \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \quad (4.61)$$

por definición el esfuerzo desviador S_{ij} en terminos de p se puede escribir como,

$$S_{ij} = (\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) \quad (4.62)$$

al reemplazar (4.62) en (4.61) se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{e}^e \delta_{ij} \right) + \dot{e}^e K_s \delta_{ij} + p \left(\frac{\dot{K}_s}{K_s} \right) \delta_{ij} + (\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \quad (4.63)$$

suponiendo que la relación de Poisson ν es independiente del esfuerzo, se puede escribir una relación de proporcionalidad entre los módulos como,

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{E_s}{3(1-2\nu)} & G_s &= \frac{E_s}{2(1+\nu)} \\ \alpha &= \frac{K_s}{G_s} = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} & \alpha &= \frac{\dot{K}_s}{\dot{G}_s} \Rightarrow \frac{\dot{K}_s}{K_s} = \frac{\dot{G}_s}{G_s} \end{aligned} \quad (4.64)$$

al reemplazar la relación de proporcionalidad $\frac{\dot{K}_s}{K_s} = \frac{\dot{G}_s}{G_s}$ en la ecuación (4.63) se tiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{e}^e \delta_{ij} \right) + \dot{e}^e K_s \delta_{ij} + p \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \delta_{ij} + (\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \quad (4.65)$$

extendiendo la ecuación se puede escribir,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right) + \dot{\varepsilon}^e K_s \delta_{ij} + p \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \delta_{ij} + \sigma_{ij} \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) - p \delta_{ij} \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \quad (4.66)$$

eliminando los terminos iguales se obtiene la siguiente ecuación,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right) + \dot{\varepsilon}^e K_s \delta_{ij} + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.67)$$

donde $K_s = \alpha G_s$ por esto se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right) + \dot{\varepsilon}^e \alpha G_s \delta_{ij} + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.68)$$

reemplazando la relación α en terminos de la relación de poisson ν ,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right) + \dot{\varepsilon}^e \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G_s \delta_{ij} + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.69)$$

al agrupar el segundo termino con el primero, haciendo $2G_s$ factor común se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left(\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \right) + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.70)$$

haciendo $\frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij}$ factor común se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \left(1 - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \right] + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.71)$$

despejando y operando la fracción se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \left(\frac{-3\nu}{1-2\nu} \right) \right] + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.72)$$

de esta manera se obtiene la expresión (4.73) que es la ecuación para tasa del tensor de esfuerzos elástico no lineal dependiente del esfuerzo, comprendida por una parte lineal $2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \right) \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right]$ y una parte no lineal $\left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij}$,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right] + \left(\frac{\dot{G}_s}{G_s} \right) \sigma_{ij} \quad (4.73)$$

el modulo secante elástico de corte G_s y su tasa \dot{G}_s en la ecuación de la tasa del tensor de esfuerzos elástico no lineal dependiente del esfuerzo, son también dependientes del esfuerzo medio y de la segunda invariante del tensor de esfuerzo desviador T ,

$$G_s = G_s(p, T) \quad (4.74)$$

la dependencia del módulo G_s al esfuerzo, puede ser expresada como una función de una medida única del esfuerzo, la cual combina los efectos del esfuerzo normal y de corte, esta es llamada el esfuerzo elástico equivalente σ_e según [8],

$$\sigma_e = \sqrt{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2} \quad (4.75)$$

la tasa de G_s de la ecuación (4.74) estada por,

$$\dot{G}_s = \frac{\partial G_s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial G_s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.76)$$

donde $\frac{\partial p}{\partial t}$ y $\frac{\partial T}{\partial t}$ son iguales \dot{p} y \dot{T} respectivamente entonces se obtiene,

$$\dot{G}_s = \frac{\partial G_s}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial G_s}{\partial T} \dot{T} \quad (4.77)$$

si se hace $\dot{p} = \frac{\dot{S}}{3}$ y $\dot{T} = \frac{S_{ij}\dot{S}_{ij}}{2T}$ la ecuación (4.77) se puede escribir,

$$\dot{G}_s = \frac{\partial G_s}{\partial p} \frac{\dot{S}}{3} + \frac{\partial G_s}{\partial T} \frac{S_{ij}\dot{S}_{ij}}{2T} \quad (4.78)$$

reemplazando \dot{G}_s en la ecuación (4.73) de tasa del tensor de esfuerzos elástico no lineal dependiente del esfuerzo se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right] + \frac{\partial G_s}{\partial p} \frac{\dot{S}}{3G_s} + \frac{\partial G_s}{\partial T} \frac{S_{ij}\dot{S}_{ij}}{G_s 2T} \quad (4.79)$$

donde primer término $2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right]$ puede ser visto como la tasa del tensor de esfuerzos elástico lineal $\dot{\sigma}_{ij}^e$ dado por,

$$2G_s \left[\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^e \delta_{ij} \right] = \dot{\sigma}_{ij}^e = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (4.80)$$

a su vez el término C_{ijkl}^e para el tensor de rigidez elástico tangente, puede escribirse en términos del esfuerzo equivalente σ_e (desarrollo de σ_e en el apéndice, A) definido en ter-

menos del esfuerzo promedio p y de la la intensidad el esfuerzo cortante T como,

$$\sigma_e = \sqrt{3(1 - 2\nu)p^2 + 2(1 + \nu)T^2} \quad (4.81)$$

por esto se puede escribir la siguiente ecuación,

$$C_{ijkl}^e = G_s \left(\frac{2\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj} + 2(1 + \nu) \frac{\xi}{1 - \xi} \frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{\sigma_e^2} \right) \quad (4.82)$$

donde ξ

$$\xi = \frac{\sigma_e}{G_s} \frac{dG_s}{d\sigma_e} \quad (4.83)$$

reemplazando ξ en la ecuación (4.82) se obtiene la expresión final para el tensor de rigidez elástico tangente,

$$C_{ijkl}^e = G_s \left(\frac{2\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj} + 2(1 + \nu) \left[\frac{\frac{dG_s}{d\sigma_e}}{\frac{G_s}{\sigma_e} - \frac{dG_s}{d\sigma_e}} \right] \frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{\sigma_e^2} \right) \quad (4.84)$$

4.3. Plasticidad incremental de tres dimensiones

Para modelar el comportamiento cohesivo, friccionante y dilatante que presentan materiales como la arenisca es utilizada la teoría de la elasto-plasticidad con una superficie de fluencia con hardening-softening y una regla de flujo no asociativa.

4.3.1. Descomposición de las deformaciones

La tasa del tensor de deformación $\dot{\varepsilon}_{kl}$ puede ser descompuesta en una parte elástica $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$ y una parte plástica $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ como,

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\varepsilon}_{kl}^p \quad (4.85)$$

para encontrar la tasa del tensor de deformación elástica $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$ se utilizan las ecuaciones descritas anteriormente en el numeral (4.2).

Para la tasa del tensor de deformaciones plásticas es utilizada la teoría de flujo de la plasticidad, relacionada con una superficie de fluencia lineal de Mohr-Coulomb F con hardening y softening, asociados a la fricción y cohesión respectivamente.

4.3.2. Endurecimiento y regla de flujo

Como se expresaba al principio de este capítulo las deformaciones plásticas están usualmente asociadas con una función de potencial plástico en el estado de esfuerzos,

$$Q = Q(\sigma_{ij}, \psi) \quad (4.86)$$

la cual es considerada como una función isotrópica del tensor de esfuerzos. De la teoría de flujo de la plasticidad se puede obtener una regla de flujo que define la tasa del tensor de deformación plástica como,

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \quad (4.87)$$

4.3.3. Superficie de Fluencia

Para el presente modelo, de acuerdo a Vardoulakis et al. [4] se proponen las expresiones para la superficie de fluencia F y la función de potencial plástico Q de Mohr-Coulomb,

$$F = T \left[\cos \theta_L - \frac{\sin \varphi \sin \theta_L}{\sqrt{3}} \right] - (Tc - p) \sin \varphi = 0 \quad (4.88)$$

$$Q = T \left[\cos \theta_L - \frac{\sin \psi \sin \theta_L}{\sqrt{3}} \right] + p \sin \psi = 0 \quad (4.89)$$

los conceptos de la superficie de fluencia F y del potencial plástico Q dicen que estos están en función del esfuerzo y el parámetro ψ como,

$$F = F(\sigma_{ij}, \psi) = 0 \quad Q = Q(\sigma_{ij}, \psi) \quad (4.90)$$

una suposición clásica asume que la tasa de deformación plástica es generada cuando se cumplen las siguientes condiciones,

1. El estado de esfuerzos este sobre la superficie de fluencia
2. Se produce carga a partir de la superficie de fluencia

F , Q y ψ se relacionan por medio de la regla de flujo de la ecuación (4.87),

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \quad (4.91)$$

las siguientes condiciones se deben cumplir y ser consistentes con la regla de flujo para.

$$F = F(\sigma_{ij}, \psi) = 0 \quad \dot{F} = 0 \quad \dot{\psi} > 0 \quad (4.92)$$

Estas condiciones dan paso a la condición de consistencia de Prager de la teoría de flujo de la plasticidad,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0 \quad (4.93)$$

al resolver la ecuación de la condición de consistencia de Prager, para $\dot{\psi}$ se obtiene,

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \frac{\langle 1 \rangle}{H} \quad (4.94)$$

donde H es el modulo de plasticidad que a su vez, está compuesto por,

$$H = H_0 + H_t \quad (4.95)$$

donde,

$$H_0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} \quad (4.96)$$

$$H_t = -\frac{\partial F}{\partial \psi} \quad (4.97)$$

por esto,

$$H = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial F}{\partial \psi} \quad (4.98)$$

el término H_t de la ecuación (4.95) es llamado modulo de endurecimiento,

- en el caso que $H_t > 0 \rightarrow$ ocurre Hardening
- en el caso que $H_t < 0 \rightarrow$ ocurre Softening

reemplazando la ecuación (4.94) de la solución de $\dot{\psi}$ en la ecuación (4.87) de la regla de flujo, la tasa para el tensor de deformación plástica toma la siguiente forma,

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} \frac{\langle 1 \rangle}{H} \quad (4.99)$$

según [15] los paréntesis $\langle 1 \rangle$ que aparecen en la ecuación (4.94) son llamados paréntesis de McAuley, de la teoría de la elasticidad se tiene la ecuación que relacionan la tasa del tensor de deformación elástica $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ con la tasa del tensor de esfuerzos $\dot{\sigma}_{ij}$,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad \dot{\varepsilon}_{kl}^e = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{C_{ijkl}^e} \quad (4.100)$$

al definir el término D_{klij}^e como una relación del tensor de rigidez elástico isotrópico como,

$$C_{ijkl}^e = \frac{1}{D_{klij}^e} \quad (4.101)$$

la tasa del tensor de deformación elástica se puede escribir como

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^e = D_{klij}^e \dot{\sigma}_{ij} \quad (4.102)$$

según la ecuación (4.85) la tasa del tensor de deformación $\dot{\varepsilon}_{kl}$ puede ser descompuesta en una parte elástica $\dot{\varepsilon}_{kl}^e$ y una parte plástica $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ como,

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\varepsilon}_{kl}^p \quad (4.103)$$

reemplazando las ecuaciones (4.102) y (4.87) en (4.103) la tasa del tensor de deformación se puede escribir,

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = D_{klij}^e \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \quad (4.104)$$

despejando de la anterior ecuación (4.104) la tasa del tensor de esfuerzos,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \right) \frac{1}{D_{klij}^e} \quad (4.105)$$

reemplazando (4.102) en (4.105) esta se puede escribir,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \right) \quad (4.106)$$

al expandir esta expresión se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} - C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \quad (4.107)$$

reemplazando $\dot{\psi}$ de la ecuación (4.94) en la ecuación (4.107),

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} - C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\langle 1 \rangle}{H} \quad (4.108)$$

de la ecuación (4.108) para la tasa del tensor de esfuerzos se puede factorizar la tasa del tensor de deformación y se obtiene,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\langle 1 \rangle}{H} \right] \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.109)$$

por lo anterior el término $\left[C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\langle 1 \rangle}{H} \right]$ se define como el tensor de rigidez tangente elasto-plástico dado por,

$$C_{ijkl}^{ep} = \left[C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\langle 1 \rangle}{H} \right] \quad (4.110)$$

de la ecuación (4.110), también se puede definir el tensor de rigidez tangente plástico C_{ijkl}^p como,

$$C_{ijkl}^p = C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\langle 1 \rangle}{H} \quad (4.111)$$

por esto el tensor de rigidez tangente elasto-plástico se puede escribir,

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p \quad (4.112)$$

combinando (4.112) en (4.109) se llega a la expresión

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.113)$$

que es la ecuación que relaciona la tasa del tensor de esfuerzos y la tasa del tensor de deformación con el tensor de rigidez tangente elasto-plástico de la teoría de la elastoplasticidad. Con la cual se pueden calcular los esfuerzos y deformaciones elasto-plásticas del material.

4.4. Poro-Elasticidad

La erosión tiene consecuencias en el comportamiento mecánico de la roca según [4] por lo dicho por Papamichos et al. en el artículo [8]. Cuando la porosidad de la roca aumenta las propiedades mecánicas como la resistencia y la rigidez de la roca se reducen. Por esto la función de fluencia no solo dependerá de las deformaciones plásticas de corte sino también de la porosidad. Para introducir en el modelo mecánico del comportamiento de la roca se introduce el término C^{PORO} llamado tensor de porosidad tangente elasto-plástico. Este término se introduce de una manera similar a la dependencia que se definió para el módulo elástico de Young en el artículo [9].

Para la formulación de las relaciones esfuerzos deformación, se utiliza el concepto de esfuerzos parciales en la teoría mezclas. El medio se considera como la mezcla de dos fases, con un tensor de esfuerzos totales de Cauchy σ_{ij} , y esfuerzos parciales $\sigma_{ij}^{(a)}$, donde se asigna ($a = 1$) para la fase solida y ($a = 2$) para la fase fluida.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad (4.114)$$

El esfuerzo parcial para la fase fluida (2) está directamente relacionado a la presión de poros p por,

$$\sigma_{ij}^{(2)} = -\phi p \delta_{ij} \quad (4.115)$$

y el esfuerzo parcial para la fase solida (1) está dado por

$$\sigma_{ij}^{(1)} = (1 - \phi) \bar{\sigma}_{ij} \quad (4.116)$$

donde $\bar{\sigma}_{ij}$ es la parte constitutiva relacionada a las deformaciones. Según el modelo lineal elástico isotrópico el tensor de esfuerzos elástico está dado por,

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \Lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (4.117)$$

de la ecuación (4.17) se tiene la ecuación para el tensor elástico isotrópico C_{ijkl}^e en terminos de las constantes de Lamé,

$$C_{ijkl}^e = \Lambda\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{lk}) \quad (4.118)$$

y las ecuaciones (4.16) y (4.15) expresan las constantes de Lamé en términos de la relación de Poisson ν y el módulo elástico de Young \bar{E} como,

$$\Lambda = \frac{\nu\bar{E}}{(1-\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = G_s = \frac{\bar{E}}{2(1-\mu)} \quad (4.119)$$

al introducir una ley de daño que afecta al módulo elástico de Young E , las constantes de

Lamé se puede expresar como,

$$\bar{E} = E(1 - n) \Rightarrow \begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda - \lambda n \\ \bar{\mu} = \mu - \mu n \end{cases} \quad (4.120)$$

por esto la ecuación (4.118) se puede escribir,

$$C_{ijkl}^{PORO} = \lambda \delta_{ik} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{lk}) - n (\lambda \delta_{ik} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{lk})) \quad (4.121)$$

por lo que se puede deducir que el tensor de porosidad tangente elástico-plástico C_{ijkl}^{PORO} está dado por,

$$C_{ijkl}^{PORO} = C_{ijkl}^e - n C_{ijkl}^e \quad (4.122)$$

Capítulo 5

Modelo Acoplado de Producción de Arena

En el capítulo 3 se presentó el **modelo de erosión de producción de Arena** el cual describe el comportamiento erosivo, por medio de las ecuaciones de erosión de la matriz de la roca. En el capítulo 4 se presentó el **modelo poro-mecánico de producción de arena** el cual describe el comportamiento poro-mecánico del sistema (sólido-fluido) con el uso de la teoría y ecuaciones de la poro-elasto-plasticidad.

En el presente capítulo se relacionan las ecuaciones anteriores de los capítulos (3) y (4) para formular un modelo acoplado entre los dos mecanismos que se presentan en la explotación de petróleo al ocurrir el fenómeno de producción de arena.

El comportamiento de un geo-material (arenisca), erosionable y saturado de petróleo, sometido a esfuerzos, deformaciones y flujo de fluido está dado por dos comportamientos. (1) El comportamiento poro-mecánico del sistema solido-fluido, el cual se describe con la teoría y ecuaciones de la poro-elasto-plasticidad y (2) el comportamiento erosivo de la matriz sólida de la roca descrito por la teoría y ecuaciones de erosión.

5.1. Proceso poro-elásto-plástico

Para el flujo de fluido se propone trabajar en condiciones de estado estable, de acuerdo a lo dicho por Papamichos et al. [3], dadas las condiciones en la que se realizaron los ensayos, para una muestra de arenisca de alta permeabilidad y la baja tasa de aplicación

de la carga. Para la condición de estado estable el proceso poro-elásto-plástico se describe por las siguientes ecuaciones,

La ecuación de equilibrio para un cuerpo (B.14) del apéndice B:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = Div\sigma = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

la ecuación constitutiva para la tasa de esfuerzos poro-elásto-plástica del capítulo 4:

$$\dot{\sigma}_{ijkl} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} + \alpha \dot{p} \delta_{ij} - C_{ij}^{PORO} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad (5.2)$$

la ecuación de continuidad para el flujo partícula-fluido (3.56) del capítulo 3:

$$\text{div} q_i = 0, \quad (5.3)$$

y la ecuación de la ley de Darcy (3.89) del capítulo 3:

$$q_i = -\frac{k}{\eta} \partial_i p. \quad (5.4)$$

Donde la σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, $\dot{\sigma}_{ijkl}$ es la tasa del tensor de esfuerzos, C_{ijkl}^{ep} es el tensor de rigidez tangente elastoplástico, C_{ij}^{PORO} es el tensor de porosidad tangente elastoplástico, $\dot{\epsilon}_{ijkl}$ es la tasa del tensor de deformación y α es el coeficiente de Biot del esfuerzo efectivo, p es la presión de poros y k es la permeabilidad física o de Mustak y η la viscosidad absoluta o dinámica del fluido. Los esfuerzos a tensión y las deformaciones son positivas, la presión de poros es positiva en compresión. El comportamiento elástico está basado en un modelo constitutivo elástico incremental no lineal dependiente del esfuerzo.

El comportamiento plástico está basado en la teoría de la elásto-plasticidad con una superficie de fluencia de Mohor-Coulomb con (hardening asociado a la fricción) y (softening asociado a la cohesión). La dilatancia plástica está descrita por un función de potencial plástico de Mohor-Coulomb, que no igual a la función de la superficie de fluencia, por esto la regla de flujo de la plasticidad es no asociativa.

La erosión tiene consecuencias en el comportamiento mecánico de la roca según [4] por lo dicho por Papamichos et al. en el artículo [8]. Cuando la porosidad de la roca aumenta las propiedades mecánicas como la resistencia y la rigidez de la roca se reducen.

en la ecuación (4.110) del capítulo 4 se definió al tensor de rigidez tangente elasto-plástico como,

$$C_{ijkl}^{ep} = \left[C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\langle 1 \rangle}{H} \right] \quad (5.5)$$

de la ecuación (4.84) se tiene el tensor de rigidez elástico tangente del capítulo 4,

$$C_{ijkl}^e = G_s \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj} + 2(1+\nu) \left[\frac{\frac{dG_s}{d\sigma_e}}{\frac{G_s}{\sigma_e} - \frac{dG_s}{d\sigma_e}} \right] \frac{\sigma_{ij} \sigma_{kl}}{\sigma_e^2} \right) \quad (5.6)$$

de la ecuación (4.111) se tiene el tensor de rigidez tangente plástico C_{ijkl}^p como,

$$C_{ijkl}^p = C_{ijkl}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \frac{\langle 1 \rangle}{H} \quad (5.7)$$

por lo anterior el tensor de rigidez tangente elasto-plástico se escribe como,

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p \quad (5.8)$$

de la ecuación (4.121) y (4.122) se tienen la expresiones para el tensor de porosidad tangente elásto-plástico C_{ijkl}^{PORO} como,

$$C_{ijkl}^{PORO} = \lambda \delta_{ik} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{lk}) - n (\lambda \delta_{ik} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{lk})) \quad (5.9)$$

$$C_{ijkl}^{PORO} = C_{ijkl}^e - n C_{ijkl}^e \quad (5.10)$$

Para el presente modelo la relación de Poisson es constante y el modulo secante de corte G_s depende del esfuerzo equivalente σ_e (desarrollo de σ_e en el apéndice B) definido en terminos del esfuerzo promedio p y de la la intensidad el esfuerzo cortante T como,

$$\sigma_e = \sqrt{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2} \quad (5.11)$$

las expresiones para la superficie de fluencia F y la función de potencial plástico Q de Mohr-Coulomb están dadas la ecuaciones (4.88) y (4.89),

$$F = T \left[\cos \theta_L - \frac{\sin \varphi \sin \theta_L}{\sqrt{3}} \right] - (Tc - p) \sin \varphi = 0 \quad (5.12)$$

$$Q = T \left[\cos \theta_L - \frac{\sin \psi \sin \theta_L}{\sqrt{3}} \right] + p \sin \psi = 0 \quad (5.13)$$

y la expresión para la regla de flujo de la ecuación (4.91)

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\psi} \quad (5.14)$$

donde el parámetro de endurecimiento $\dot{\psi}$ se da por la ecuación (4.94),

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl} \frac{\langle 1 \rangle}{H} \quad (5.15)$$

5.2. Proceso de erosión de la matriz de roca

Para describir el proceso de erosión de la matriz de roca se utilizan las siguientes ecuaciones

La ecuación de continuidad para los sólidos (3.44) del capítulo 3:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{d\dot{m}}{\rho_s dV} \quad (5.16)$$

la ecuación (3.62) de la ley de erosión de difusión de la porosidad del capítulo 3:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 n}{\partial x_i^2} \quad (5.17)$$

y la ecuación de Carman-Kozeny (3.94) de la ley de permeabilidad del capítulo 3:

$$k = kc \frac{n^3}{(1-n)^2} \quad (5.18)$$

donde \dot{m} de la ecuación (5.16) es la tasa de masa producida por unidad de volumen, dV es la unidad de volumen y ρ_s es la densidad de los sólidos. En la ecuación (5.17) el término n es la porosidad de la roca y λ es el coeficiente de difusividad de porosidad con dimensiones $\left[\frac{L^2}{t}\right]$. En la ecuación (5.18) el término k es la porosidad física de la roca ó de Mustak y kc es una constante del material. Para el modelo acoplado se considera un medio conformado por un sólido poro-elásto-plástico compresible basándose en la diferencia existente entre la alta velocidad del fluido comparada con la velocidad del sólidos. De acuerdo a lo dicho por en artículo [4] los cambios volumetricos debidos a la porosidad son despreciados por ser muy pequeños comparados con los cambios debidos a la erosión de la matriz. Segün

[4] en el evento que ocurra consolidación del medio las anteriores ecuaciones deberán ser reformuladas, porque en el esqueleto se produciría compactación.

Los estudios realizados en areniscas encaminados al análisis del fenómeno de la producción de arena, han mostrado resultados donde se evidencia que la producción de arena se inicia después de un estado crítico de esfuerzo. Para que la producción de arena tenga lugar la resistencia de la roca debe reducirse y llegar a un nivel suficiente para que el flujo de petróleo sea capaz de erosionar la matriz y desagregar los granos fallados de esta. De acuerdo a esto las tres ecuaciones para el proceso de erosión, (5.16), (5.17) y (5.18) solo se cumplen y funcionan en un volumen erosionable (volumen en que la roca tiene la resistencia mínima para ser erosionable) llamado por volumen V^d que forma parte del volumen representativo del materia V . La porosidad de la roca n en el volumen V que no forma parte del volumen V^d se considera constante y mantiene el valor inicial de la porosidad. El volumen erosionable entonces está en función de la plastificación de la roca, por esto puede ser considerado como función $V^d = V^d(\gamma^p)$. La gráfica (5.1) muestra las diferentes zonas que se presentan en una arenisca, se muestra el volumen erosionable y volumen que ya erosionado, con a la zona plástica y fluidizada respectivamente.

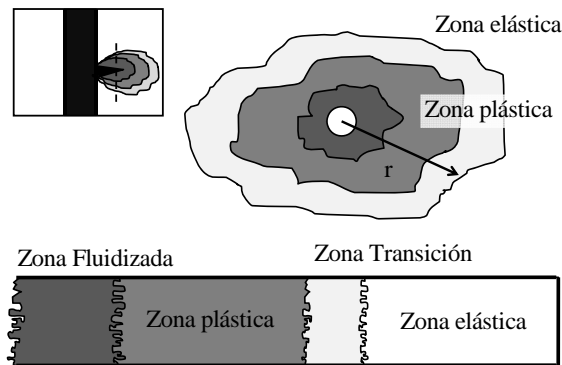


Figura 5.1: esquema de volumen erosionable

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

6.1. Resumen del trabajo

En el trabajo de investigación se presentó la descripción teórica y matemática de los mecanismos de falla y de erosión de la roca arenisca que conforma un yacimiento de petróleo cuando esta sometido a esfuerzos, deformaciones y flujo de petróleo. El trabajo fue relacionado al fenómeno de producción de arena para poder encontrar una solución matemática a este problema. Se consideró un medio poroso saturado de petróleo, el cual falla por los esfuerzos presentes y tiende a erosionarse por la fuerzas ejercidas sobre los granos de arena que conforman la roca arenisca.

En el (Capítulo 1) se encuentran los conceptos generales sobre yacimientos de petróleo y los conceptos básicos de geo-mecánica para desarrollar el modelo matemático presentado. Se encuentra la motivación de la tesis y los objetivos planteados.

El estado de conocimiento (Capítulo 2) es el resultado de la revisión bibliográfica realizada. Esta describe la descripción física del problema, las distintas clases de producción de arena que se pueden presentar y el primer acercamiento a el modelo acoplado de producción de arena.

En el (Capítulo 3) se presentó el modelo matemático de erosión donde se hacen las suposiciones y se desarrollan ecuaciones basadas en la teoría de mezclas del continuo con el

uso del concepto de fracciones de volumen. En este capítulo se presentó la ley constitutiva de erosión la cual relaciona los cambios de porosidad del medio con el tiempo. Se presentó el desarrollo de la ley de Darcy para flujo en medios porosos y la ley de permeabilidad de Karman-Kozeny.

En el (Capítulo 4) se consignó el modelo Poro-Mecánico de producción de arena y se muestra el desarrollo detallado de las ecuaciones, para poder tener las expresiones de las tasas de esfuerzos y deformaciones totales del medio propuesto.

En el (Capítulo 6) se presentó el acople de los modelos de erosión y falla mecánica con todas la ecuaciones desarrolladas a lo largo del documento.

6.2. Conclusiones y trabajo futuro

Se presento un modelo matemático para describir el comportamiento de un yacimiento de arenisca sometido a esfuerzos y flujo de fluido durante el fenómeno de producción de arena en la explotación de petróleo. El modelo se compone de dos partes. (1) La descripción matemática del comportamiento erosivo de la matriz de roca que conforma el yacimiento descrito con el uso de la teoría y ecuaciones de erosión y (2) la descripción matemática del comportamiento mecánico de la roca descrito por la teoría y ecuaciones de la poro-elásto-plasticidad.

La teoría de mezclas del continuo se utilizó para describir el flujo multi-fase de un medio poroso saturado de fluido. Basándose en esta teoría se formularon las ecuaciones de balance de masa para cada una de las fases (s, f, fs) utilizando el concepto de fracciones de volumen. Las ecuaciones de balance de masa en términos de la porosidad n y la concentración de las partículas en suspensión en el fluido c se formularon a partir de las ecuaciones de la velocidades y flujo parciales de cada una de las fases.

La ley de porosidad para un modelo de erosión depende de la física del problema. En este trabajo se presento una la ley de erosión que relaciona el cambio de la porosidad en el tiempo, con un gradiente de la porosidad. Suponiendo una baja concentración de partículas sólidas en suspensión. La ley de erosión presentada fue propuesta por [4] como una ley de

difusión para la porosidad.

El modelo de poro-mecánico describe el comportamiento de la falla mecánica de la roca y el debilitamiento que esta sufre por la acción de los esfuerzos presentes, el flujo de fluido y los cambios en la porosidad. El modelo esta descrito por la teoría y ecuaciones de la poro-elásto-plasticidad. La elasticidad del modelo es incremental, no lineal y dependiente del esfuerzo, propia del comportamiento mecánico de medios granulares. La plasticidad fue introducida por un modelo plástico con una regla de flujo no asociada. La poro-elasticidad permite introducir el debilitamiento que sufre la roca al aumentar su porosidad, para esto se utilizó una ley de daño que afecta las constantes de Lamé.

Para un futuro trabajo de investigación se considera solucionar las ecuaciones presentadas y desarrollar un algoritmo para determinar en laboratorio los parámetros del modelo.

Para solucionar las ecuaciones del modelo es necesario la utilización de métodos de solución numérica asistidos por computador. El acople de los dos comportamientos para el modelo presentado, se puede realizar mediante la solución de las ecuaciones, con el uso del método de los elementos finitos. Con este método se pueden simular problemas de contorno, con condiciones iniciales, geometrías propias de un yacimiento, parámetros de resistencia de los materiales y parámetros del modelo.

Apéndice A

Esfuerzo elástico equivalente

El tensor de elástico de deformaciones ε_{ij}^e y el tensor de elástico de esfuerzos σ_{ij}^e se pueden descomponer en una parte esférica y una parte desviadora como

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{e(\text{esf})} + \varepsilon_{ij}^{e(\text{des})} = \frac{p}{K_s} + \frac{1}{2G_s} S_{ij} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{e(\text{esf})} + \sigma_{ij}^{e(\text{des})} = p + S_{ij} \quad (\text{A.2})$$

al multiplicar ambos lados de la ecuación de la ecuación (A.1) por σ_{ij}^e se obtiene,

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{e(\text{esf})} \sigma_{ij}^{e(\text{esf})} + \varepsilon_{ij}^{e(\text{des})} \sigma_{ij}^{e(\text{des})} = \frac{p}{K_s} p + \frac{1}{2G_s} S_{ij} S_{ij} \quad (\text{A.3})$$

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \frac{p^2}{K_s} + \frac{S_{ij}^2}{2G_s} \quad (\text{A.4})$$

si, se tiene que el esfuerzo de corte T en términos del esfuerzo desviador está dado por $T^2 = \frac{S_{ij}^2}{2}$, al remplazarlo en (A.4) se obtiene,

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \frac{p^2}{K_s} + \frac{T^2}{G_s} = \frac{p^2 G_s + T^2 K_s}{K_s G_s} \quad (\text{A.5})$$

por la ecuación (4.64) el modulo secante elástico de corte G_s y el módulo secante elástico de compresión se pueden relacionar en terminos de la relación de poisson como,

$$K_s = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} G_s \quad (\text{A.6})$$

reemplazando la anterior relación en (A.5), se obtiene,

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \frac{p^2 G_s + T^2 \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G_s}{K_s G_s} = \frac{p^2 + T^2 \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}}{K_s} = \frac{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2}{3(1-2\nu)K_s}$$

a su vez, el modulo secante de elasticidad E_s de la ecuación (4.64) se relaciona con el módulo secante elástico de compresión por,

$$E_s = 3K_s(1-2\nu) \quad (\text{A.7})$$

por esto se puede escribir,

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \frac{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2}{E_s} \quad (\text{A.8})$$

reorganizando la ecuación de la siguiente manera

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \frac{1}{E_s} 3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2 \quad (\text{A.9})$$

y al definir $3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2 = \sigma_{ij}^e \sigma_{ij}^e$ como el cuadrado del tensor elástico de esfuerzos y reemplazarlo en (A.9) se puede escribir,

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \frac{\sigma_{ij}^e \sigma_{ij}^e}{E_s} \quad (\text{A.10})$$

si se tiene que el tensor elástico de deformación está definido como $\varepsilon_{ij}^e = \frac{\sigma_{ij}^e}{E_s}$ se puede escribir

$$\varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij}^e \quad (\text{A.11})$$

lo cual cumple con la igualdad, el término $\sqrt{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2}$ es llamado tensor elástico de esfuerzos equivalente σ_e dado por,

$$\sigma_e = \sqrt{3(1-2\nu)p^2 + 2(1+\nu)T^2} \quad (\text{A.12})$$

el cual es una medida del esfuerzo que combina los efectos del esfuerzo normal y de corte.

Apéndice B

Ecuaciones de equilibrio para un cuerpo

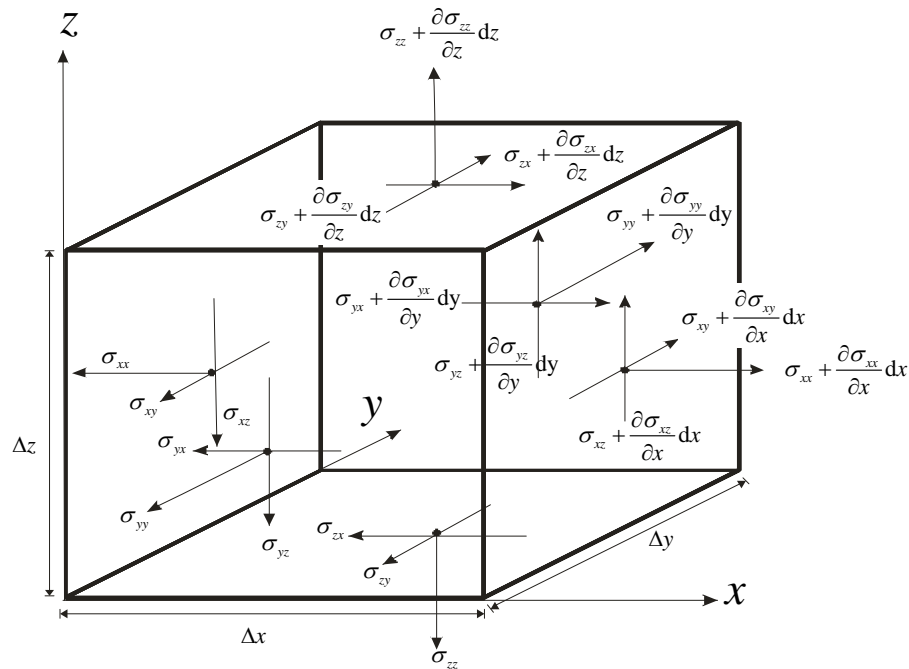


Figura B.1: Esfuerzos normales y cortantes en un elemento

En el cubo de dimensiones $dx \cdot dy \cdot dz$ se realiza un equilibrio entre los esfuerzos axiales y cortantes en cada una de sus caras. Para las dos caras verticales de dimensiones $dy \cdot dz$,

que interceptan el eje x en $(x = 0)$ y $(x = dx)$, se obtiene,

$$-\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx + \sigma_{xx} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$-\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}dx + \sigma_{xy} = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$-\sigma_{xz} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}dx + \sigma_{xz} = 0, \quad (\text{B.3})$$

combinando las tres ecuaciones (B.1), (B.2) y (B.3) para el esfuerzo axial en el eje \mathbf{x} y los esfuerzos cortantes para los ejes \mathbf{y} y \mathbf{z} se obtiene,

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}dx = 0, \quad (\text{B.4})$$

para las dos caras verticales de dimensiones $dx \cdot dz$, que interceptan el eje y en $(y = 0)$ y $(y = dy)$ se obtiene,

$$-\sigma_{yx} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dy + \sigma_{yx} = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$-\sigma_{yy} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}dy + \sigma_{yy} = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$-\sigma_{yz} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}dy + \sigma_{yz} = 0, \quad (\text{B.7})$$

combinando las tres ecuaciones (B.5), (B.6) y (B.7) para el esfuerzo axial en el eje \mathbf{y} y los esfuerzos cortantes para los ejes \mathbf{x} y \mathbf{z} se obtiene,

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}dy = 0, \quad (\text{B.8})$$

para las dos caras horizontales de dimensiones $dx \cdot dy$, que interceptan el eje z en $(z = 0)$ y $(z = dz)$, se obtiene,

$$-\sigma_{zx} + \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz + \sigma_{zx} = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$-\sigma_{zy} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}dz + \sigma_{zy} = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$-\sigma_{zz} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}dz + \sigma_{zz} = 0, \quad (\text{B.11})$$

combinando las tres ecuaciones (B.9), (B.10) y (B.11) para el esfuerzo axial en el eje \mathbf{z} y los esfuerzos cortantes para los ejes \mathbf{x} y \mathbf{y} se obtiene,

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}dz + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}dz = 0. \quad (\text{B.12})$$

Las tres ecuaciones (B.4),(B.8)y (B.12), del equilibrio de todos los esfuerzos axiales y

cortantes en cada una de las caras, se pueden expresar en notación tensorial,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

y lo que quiere decir,

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = \text{Div}\sigma = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (\text{B.14})$$

Bibliografía

- [1] J. Alexander G. Andersen T. Kaneko J. Lopez de Cardenas M. Nishi M. Numasawa K. Yoshioka A. Roy A. Wilson A. Twynam A. Acock, T. Orourke. Métodos prácticos de manejo de la producción de arena. *Oilfield Review*, 1:10–29, 2004.
- [2] KJ Bakker Adel H den. A transport model for filtration:control of erosion processes. *1st International conference on Geo-Filters, Karlsruhe*.
- [3] J. Tronvoll E. Papamichos, I. Vardoulakis and A. Skjærstein. Volumetric sand production model and experiment. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 25:789–808, 2001.
- [4] I. Vardoulakis E. Papamichos E. Sand erosion with a porosity difusión law. *computers and Geotechnics*, 32:47–58, 2005.
- [5] E. M. Lemoine H. H. Vaziri and Y. Xiao. Quantification of sand production induced improvement in productivity index. *Can. Geotech. J*, 39:1088–1102, 2002.
- [6] Gan Han. *Rock Stability under Different Fluid Flow Conditions*. University of Waterloo, 2003.
- [7] P. Papanastasiou I. Vardoulakis, M. Stavropoulou. Hydromechanical aspects of the sand production problem. *Transport in Porous Media*, 22, pages 225–244, 1996.
- [8] E. Papamichos A. Oulahna J. Tronvoll J. Sulem, I. Vardoulakis. Elasto-plastic modelling of red wildmoor sandstone. *Mechnaics of cohesive-frictional materials*, 4:215–245, 1999.
- [9] P. Papanastasiou M. Stavropoulou and I. Vardoulakis. Coupled wellbore erosion and stability analysis. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 22, pages 749–769, 1998.

-
- [10] O. P. Fedde N. Morita, D. L. Whitfill and T. H. Lovij. Realistic sand production prediction: Analytical approach. *62nd Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers Proc*, 62, 1987.
- [11] E. Papamichos. Constitutive laws for geomaterials. *Oil & Gas Science and Technology*, 54:759–771, 1999.
- [12] W. Ehlers R. de Boher. The development of the concept of effective stresses. *Acta Mechanica*, 83:77–92, 1990.
- [13] A. Guzman-Garcia C. Huggins L. Knauer M. Minner N. Kupsch L. Linares H. Rouugh M Waite R. Kopper, E. Decoster. Yacimientos de petróleo pesado. *Oilfield Review*.
- [14] H. Steeb, S. Diebels, and I. Vardoulakis. Generalized multi-flow models for erosive mixtures. *Phil. Mag.*, 2004. submitted for publication.
- [15] I. Vardoulakis and J. Sulem. *Bifurcation analysis in geomechanics*. Chapman & Hall, 1995.
- [16] J. Wang. *Mathematical and Numerical Modelling of Sand Production as a Coupled Geomechanics-Hydrodynamics Problem*. The University of Calgary, 2003.