

MODELO MATEMÁTICO DE UN AMORTIGUADOR MAGNETOREOLÓGICO

ANDRÉS GUILLERMO GUASCA GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
BOGOTÁ, D. C.
JULIO DE 2007

MODELO MATEMÁTICO DE UN AMORTIGUADOR MAGNETOREOLÓGICO

ANDRÉS GUILLERMO GUASCA GONZÁLEZ

Director
CARLOS FRANCISCO RODRIGUEZ HERRERA

Documento Final de Tesis para Optar a Título de Magíster en Ingeniería Mecánica

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
BOGOTÁ, D. C.
JULIO DE 2007

DEDICATORIA

A Dios

A mis padres Guillermo y Nelly por la educación y el apoyo que me han brindado durante toda mi vida.

A mi hermana Adriana por su constante apoyo.

A Carolina por ser tan especial y animarme en los momentos difíciles.

A mis amigos.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Carlos Francisco Rodríguez por su apoyo y constante guía en el desarrollo del proyecto

A las personas encargadas de los laboratorios del programa de Tecnología e Ingeniería Mecánica de la Universidad Distrital, en especial a los Ingenieros Edwin Medina y Norberto Chacón por su constante colaboración en el desarrollo práctico de este proyecto

Al profesor Danilo Rairan por su colaboración en la información concerniente al comportamiento del campo magnético en la generación de una fuerza magnética.

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN.....	13
1. OBJETIVOS	15
1.1 OBJETIVO GENERAL	15
1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	15
2 MODELAMIENTO MATEMÁTICO.....	16
2.1 COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO	16
2.2 INFLUENCIA DE LAS PARTÍCULAS.....	19
2.3 EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO.....	22
2.3.1 Planteamiento del modelo incluyendo solo el peso de las partículas.....	23
2.3.2 Planteamiento del modelo incluyendo el peso de las partículas y el arrastre sobre las mismas.....	26
3 SIMULACIONES Y RESULTADOS.....	28
3.2 INFLUENCIA DE LAS PARTÍCULAS.....	29
3.3 EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO.....	30
3.3.1 Influencia del campo magnético y el peso en el comportamiento del AMR.....	31
3.3.2 Influencia del campo magnético, el peso y el arrastre de las partículas en el comportamiento del AMR.....	33
4 NUMEROS ADIMENSIONALES.....	35
5 CONCLUSIONES.....	39
6 BIBLIOGRAFIA	40

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Valores de las variables para la realización de las simulaciones	28
Tabla 2. Valores de la constante de amortiguamiento para diferentes corrientes (N=49).....	31
Tabla 3. Valores de la constante de amortiguamiento para diferentes corrientes (N=64).....	32
Tabla 4. Valores de la constante de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes corrientes (N=370).....	32
Tabla 5. Valores de la constante de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes corrientes (N=370).....	34

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Representación ideal de un amortiguador.....	16
Figura 2. Flujo entre dos placas paralelas.....	17
Figura 3. Comparación del comportamiento de un fluido Bingham y un fluido Newtoniano.....	20
Figura 4. Peso de las partículas igual a la fuerza de flotación.....	20
Figura 5. Esquema del pistón – bobina y el cilindro.....	22

LISTA DE GRÁFICAS

	Pág.
Gráfica 1. Comportamiento del amortiguador bajo la influencia única del componente viscoso.....	29
Gráfica 2 Fuerza del amortiguador incluyendo el componente viscoso y las partículas.....	30
Gráfica 3. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC ($N=49$).....	31
Gráfica 4. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC ($N=64$).....	32
Gráfica 5. Fuerza de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes valores de CC ($N=370$).....	33
Gráfica 6. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC ($N=49$).....	33
Gráfica 7. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC ($N=64$).....	34
Gráfica 8. Fuerza de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes valores de CC ($N=370$).....	34
Gráfica 9. Curvas adimensionales para diferentes valores de CC en el pistón - bobina.....	38

GLOSARIO

Fluido Magnetoreológico (FMR): Fluido que contiene partículas magnéticas que originan en el mismo un comportamiento variable cuando este se somete a la acción de un campo magnético.

Amortiguador Magnetoreológico (AMR): Al igual que los amortiguadores convencionales, este dispositivo es utilizado para reducir las vibraciones no deseadas en una aplicación particular, o para absorber la energía que se genera en choques o impactos. La diferencia con los dispositivos convencionales radica en la utilización de un FMR que permite una viscosidad variable dando al amortiguador una respuesta que se adapta de manera eficiente a diferentes condiciones de funcionamiento.

Bobina: Dispositivo compuesto de alambre de cobre el cual es enrollado formando varios anillos. Por el alambre circula una corriente eléctrica que genera un campo magnético que circula dentro de los anillos.

Ferromagnetismo: Propiedad de los materiales que tienen la capacidad de magnetizarse por medio de un campo magnético externo. El hierro, cobalto, níquel, gadolinio, disprosio y sus aleaciones con otros elementos o con ellos mismos se consideran materiales ferromagnéticos.

Número de Reynolds: Parámetro utilizado para predecir el comportamiento de un fluido en movimiento. Este número depende de la viscosidad, la densidad y la velocidad del fluido y del diámetro de la tubería.

Números Adimensionales: Representan parámetros o grupos adimensionales obtenidos para caracterizar el comportamiento de una o varias variables en un problema en particular. Para determinar estos número o grupos se deben tener en cuenta la mayoría de las variables que inciden en el problema.

Reología: Ciencia que estudia la relación entre el esfuerzo y la deformación de los fluidos y se ocupa de sustancias como plásticos, sangre, pinturas, suspensiones, alimentos y cualquier fluido cuya resistencia al flujo no se caracteriza por medio de la ley de Newton de viscosidad.

SIMBOLOGÍA

AMR: Amortiguador magneto – reológico
FMR: Fluido magneto reológico
 C : Constante de amortiguamiento [M/t]
 \dot{x} : Velocidad de desplazamiento del pistón [L/t]
 D : Diámetro del cilindro [L]
 d : Diámetro del pistón [L]
 g : Tamaño de la restricción anular [L]
 L : Longitud del pistón [L]
 w : Perímetro del pistón [L]
 Q : Caudal [L³/t]
 u : Velocidad del fluido dentro de la restricción anular [L/t]
 P : Presión [ML·t⁻²]
 x : Dirección en la que se desplaza el fluido [L]
 y : Dirección perpendicular al desplazamiento del fluido [L]
 τ : Esfuerzo cortante en el fluido [ML·t⁻²]
 μ : Coeficiente de viscosidad dinámica [ML·t]
 V_f : Velocidad media del fluido dentro de la restricción anular [L/t]
 f : Fuerza desarrollada por el amortiguador [M·L/t²]
 f_f : Fuerza desarrollada sobre el fluido [M·L/t²]
 A_p : Área del pistón [L²]
 A_f : Área por la que pasa el fluido [L²]
 ρ_f : Densidad del fluido [ML³]
 Q_a : Caudal dentro de la restricción anular [L³/t]
 Re_{DH} : Número de Reynolds usando el diámetro hidráulico.
 F_w : Peso de las partículas [M·L/t²]
 F_b : Fuerza de flotación de las partículas [M·L/t²]
 Re_p : Número de Reynolds de las partículas.
 V_{rel} : Velocidad relativa entre el fluido y las partículas [L/t]
 d_p : Diámetro de la partícula [L]
 ν_f : Viscosidad cinemática [L²/t]
 C_D : Coeficiente de arrastre
 F_{Di} : Fuerza de arrastre sobre cada una de las partículas [M·L/t²].
 A_{par} : Área transversal de la partícula [L²]
 V_p : Velocidad de la partícula [L/t]

L_m : Longitud del pistón – bobina por la cual circulan perpendicularmente las líneas de flujo magnético [L].

N : Numero de vueltas de la bobina.

l_a : Longitud de separación entre las partículas y las paredes del pistón [L].

S_a : Área superficial del pistón - bobina por la que circula el flujo magnético [L²]

F_m : Fuerza magnética [M·L/t²]

$\sum F_p$: Sumatoria de fuerzas sobre las partículas [M·L/t²]

F_g : Fuerza total que actúa en el espacio entre el pistón - bobina y el cilindro [M·L/t²].

N_{pr} : Número de partículas que realmente son atrapadas por el pistón – bobina.

FE : Factor de empaquetamiento.

V_{op} : Volumen ocupado por las partículas adheridas al pistón – bobina [L³].

V_{gn} : Nuevo volumen de la restricción anular [L³].

d_m : Nuevo diámetro del pistón en la región en la que actúa el campo magnético [L]

L_b : Longitud de la bobina [L].

d_a : Diámetro del alambre [L].

μ_0 : Permeabilidad del espacio vacío [M·L/t²·A²].

g_g : Gravedad [L/t²].

m_p : Masa de la partícula [M].

%wt_f : Porcentaje en peso de fluido en la suspensión (FMR)

%wt_p : Porcentaje en peso de partículas en la suspensión (FMR)

ρ_p : Densidad de la partícula [M/L³]

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un modelo matemático alternativo basado en la interrelación de tres fenómenos: El flujo interno del amortiguador entre el pistón y el cilindro (componente viscoso), el efecto de las partículas ferromagnéticas agregadas al fluido en la reología del mismo y el incremento de la resistencia al flujo inducido por el campo magnético aplicado a las partículas magnéticas.

El modelo de cada uno de estos tres fenómenos se ensambla otorgando un modelo comprensible para un amortiguador magneto – reológico. Para validar el modelo se presentan los resultados de las simulaciones realizadas sobre el mismo en las cuales se relacionan los siguientes parámetros: la corriente eléctrica en la bobina (usada para generar el campo magnético), la velocidad del pistón y la fuerza de fricción producida por el amortiguador. Este modelo brinda una herramienta de diseño que contiene de manera explícita los parámetros de los componentes físicos del amortiguador.

Estas simulaciones se desarrollaron para unos parámetros fijos del amortiguador, por ejemplo el diámetro del pistón, mientras que el parámetro principal para identificar entre una simulación y otra fue el número de vueltas de la bobina.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se han desarrollado distintas aplicaciones para los fluidos magneto - reológicos (FMR) entre las que se pueden destacar los amortiguadores, embragues y frenos para distintas aplicaciones, e incluso se han usado este tipo de fluidos en el mecanizado por arranque de material.

Los amortiguadores que utilizan fluidos magneto – reológicos (AMR) funcionan como un amortiguador convencional pero cambian el fluido por un FMR, este fluido esta compuesto de un fluido portador, generalmente un aceite sintético, y un gran número de partículas ferromagnéticas, cuyo diámetro oscila ente 20 y 50 micras. Sin la presencia de un campo magnético actuando sobre las partículas el fluido viaja libremente dentro del amortiguador, pero si es aplicado un campo magnético al fluido, las partículas ferromagnéticas se alinean con las líneas de campo magnético y generan una restricción adicional a la restricción original del dispositivo, en otras palabras, el fluido se solidifica y tiene un movimiento más restringido [1]

Estos dispositivos se han popularizado durante la última década y se pueden considerar actuadores inteligentes debido a que pueden adecuar su respuesta a la entrada que estén recibiendo, controlando una corriente eléctrica que circula por una bobina. Entre las aplicaciones de los AMR se puede destacar su uso en suspensiones de automóviles, prótesis de reemplazo en aplicación biomédica, suspensiones de sillas en vehículos de transporte pesado, lavadoras, suspensiones de bicicletas, amas de fuego, entre otras.

El FMR es un fluido No Newtoniano y se han propuesto diferentes modelos para explicar su comportamiento: Fluido tipo Bingham [4][10], fluidificación [7], algoritmos de control adaptativo no lineales[15] , redes de funciones envolventes [5] y modelos semi - físicos no lineales [8].

Sin embargo, los modelos anteriores no integran los fenómenos físicos que interactúan en el funcionamiento del amortiguador, por lo tanto, en este trabajo se propone un modelo que se basa en el comportamiento del fluido por medio de la superposición de tres efectos: el componente viscoso, la fuerza de arrastre que ejerce el fluido sobre las partículas y la incidencia del campo magnético aplicado a las mismas. Cada uno de los tres efectos mencionados se desarrolla de manera independiente para después ser ensamblados obteniendo una función en la que la fuerza depende de una constante de amortiguamiento y la velocidad de desplazamiento del pistón.

Este modelo será validado por medio de una serie de simulaciones en las que el FMR esta constituido por polvo de hierro ATOMET 1001 (70 % en peso) y como fluido portador una combinación de aceite NUTU H32 (25% en peso) y grasa blanca de litio (5% en peso).

Adicionalmente se desarrollo el planteamiento de números adimensionales que relacionan las variables principales en el funcionamiento de un AMR y que sirva

como una herramienta de diseño de estos dispositivos dependiendo de la aplicación en la que vayan a ser utilizados y brinden un acercamiento al diseño final.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un modelo matemático que ejemplifique el funcionamiento de un AMR, basándose en el comportamiento del fluido, que sirva como herramienta de diseño de estos dispositivos y brinde un acercamiento al diseño final de los mismos.

1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

Comprender el funcionamiento de los AMR para establecer las variables físicas que intervienen en el funcionamiento de los mismos.

Encontrar el coeficiente de amortiguamiento debido a la acción de las fuerzas viscosas en el fluido.

Encontrar la contribución al coeficiente de amortiguamiento originada por la presencia de partículas en el fluido.

Analizar como afecta la presencia de un campo magnético que actúa sobre las partículas ferromagnéticas del fluido.

Desarrollar un modelo matemático que incluya los tres efectos mencionados anteriormente y que sirva como una herramienta de diseño de los AMR

Realizar simulaciones del modelo desarrollado

Plantear algunos números adimensionales que relacionen las variables principales en el funcionamiento de los AMR.

2 MODELAMIENTO MATEMÁTICO

El modelo que aquí se plantea se divide en tres partes o aportes: en primero es el componente viscoso típico de un amortiguador, el segundo analiza la influencia de la presencia de partículas en el fluido portador y el tercero induce el efecto del campo magnético que se aplica al fluido sobre las partículas de hierro

2.1 COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

Matemáticamente un amortiguador puede ser modelado por medio de la siguiente ecuación:

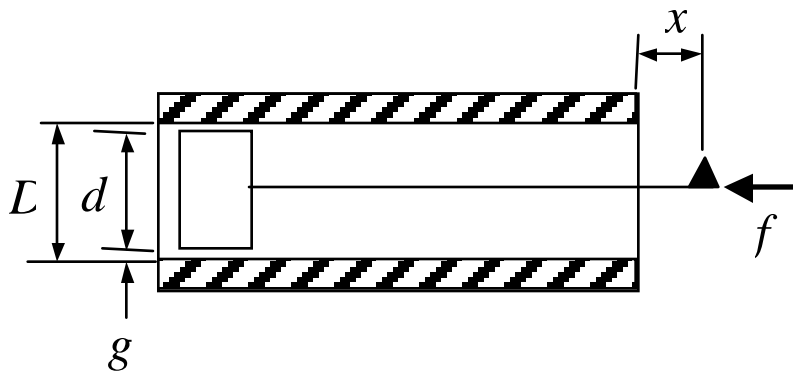
$$f = C\dot{x} \quad (2.1)$$

donde C es la constante de amortiguamiento, \dot{x} es la velocidad del pistón y f es la fuerza de fricción viscosa desarrollada por el amortiguador.

Esta fuerza es producida por la caída de presión del fluido cuando pasa por la restricción anular, y esta restricción se debe a la diferencia entre el diámetro del cilindro (D) y el diámetro del pistón (d) (Figura 1). El tamaño de esta restricción se determina por medio de:

$$g = \frac{D-d}{2} \quad (2.2)$$

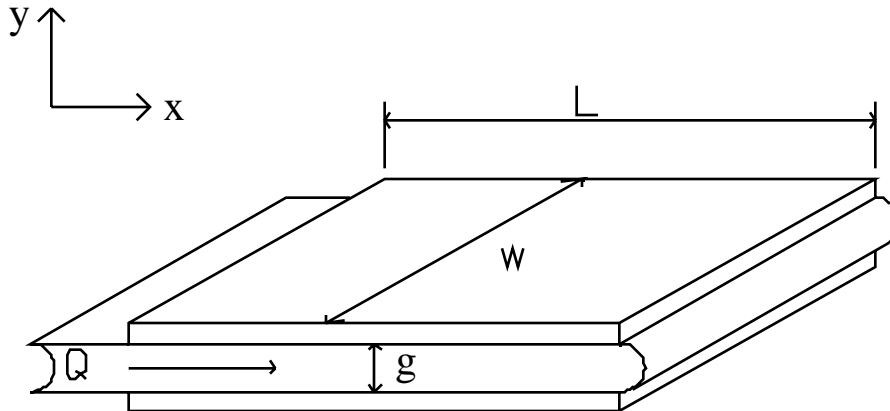
Figura 1. Representación ideal de un amortiguador



Fuente: Los autores

Si el flujo dentro de la restricción anular se considera laminar y completamente desarrollado, y el diámetro del pistón es mucho mayor a la longitud de la restricción anular, se puede modelar el flujo como completamente desarrollado entre dos placas planas paralelas (Figura 2).

Figura 2. Flujo entre dos placas paralelas



Fuente: Los autores

Al satisfacerse la ecuación de continuidad, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se reduce a:

$$0 = -\frac{dP}{dx} + \frac{d\tau}{dy} \quad (2.3)$$

En la última ecuación el cambio en la presión es constante y el esfuerzo cortante en el fluido (τ), esta dado por la ley de Newton de viscosidad:

$$\tau_{laminar} = \mu_f \frac{du}{dy} \quad (2.4)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido.

Al considerar el cambio en la presión una constante y reemplazando la ecuación (2.4) en (2.3) se obtiene:

$$\mu_f \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\Delta P}{\Delta x} \quad (2.5)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se llega a:

$$u(y) = -\frac{1}{2\mu_f} \frac{\Delta P}{\Delta x} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta la condición de no deslizamiento en las paredes $u(-g/2) = u(g/2) = 0$ se encuentra que la velocidad es:

$$u(y) = \frac{1}{8\mu_f} \frac{\Delta P}{\Delta x} (g^2 - 4y^2) \quad (2.7)$$

Teniendo la velocidad se encuentra el caudal suponiendo que $g \ll w$ por medio de la siguiente integral:

$$Q = \int_{-g/2}^{g/2} u \cdot (\pi d \cdot dy) = \pi d \int_{-g/2}^{g/2} \left(\frac{1}{8\mu_f} \frac{\Delta P}{\Delta x} (g^2 - 4y^2) \right) \cdot dy \quad (2.8)$$

Integrando se obtiene:

$$Q = \frac{\pi d}{12\mu_f} \frac{\Delta P}{\Delta x} (g^3) \quad (2.9)$$

Despejando la caída de presión

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = - \frac{Q12\mu_f}{\pi d g^3} \quad (2.10)$$

Despejando ΔP se llega a:

$$\Delta P = \frac{12\mu_f L Q}{w g^3} \quad (2.12)$$

donde L corresponde al desplazamiento que se presenta en x (Δx). Adicionalmente se puede calcular el caudal por medio de:

$$Q = \frac{\pi}{4} d^2 \dot{x} \quad (2.13)$$

Reemplazando (2.13) en (2.12) y tomando la definición de presión $P = \frac{F}{A}$ se llega a:

$$f = \frac{6\pi\mu_f d^3 L}{(D-d)^3} \dot{x} \quad (2.14)$$

En esta última ecuación se puede identificar el valor de la constante de amortiguamiento

$$C = \frac{6\pi\mu_f d^3 L}{(D-d)^3} \quad (2.15)$$

Es importante resaltar que la constante C depende únicamente de la geometría del dispositivo de amortiguamiento y de la viscosidad del fluido.

Ahora es importante calcular el valor del Número de Reynolds para el cuál se puede seguir teniendo la suposición de que el fluido se encuentra en régimen laminar. Para ello se realiza el siguiente desarrollo:

El caudal impulsado por el pistón esta dado por la ecuación (2.13) y este, por continuidad, debe ser igual al caudal que fluye por la restricción anular. Este último se puede calcular con:

$$Q_a = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot V_f \quad (2.16)$$

donde V_f es la velocidad media que tiene el fluido dentro del anillo y D es el diámetro del cilindro. Igualando las ecuaciones (2.13) y (2.16) se llega a que V_f es:

$$V_f = \frac{d^2 \cdot \dot{x}}{D^2 - d^2} \quad (2.17)$$

Al trabajar con un flujo entre placas planas paralelas se debe usar un diámetro hidráulico para hallar el Número de Reynolds, y esta definido por medio de la siguiente ecuación:

$$Re_{DH} = \frac{2\rho_f V_f g}{\mu_f} \quad (2.18)$$

Remplazando (2.17) en (2.18)

$$Re_{DH} = \frac{d^2 \cdot \dot{x}}{\nu_f (D+d)} \quad (2.19)$$

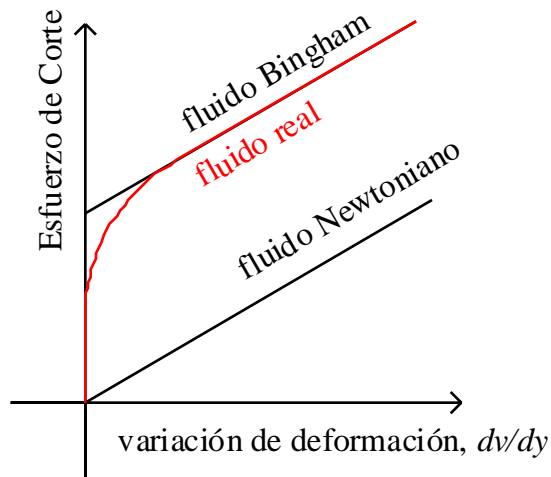
En este caso de placas planas el máximo valor del número de Reynolds antes de entrar en la región de transición es de 2300 [16]

2.2 INFLUENCIA DE LAS PARTÍCULAS

El efecto de las partículas en el fluido se puede modelar de diferentes formas y una de las más populares es la de un fluido tipo Bingham [4], [12], [9] cuyo comportamiento se puede observar en la Figura 3 y se puede modelar por medio de la siguiente ecuación:

$$\tau = \tau_0 + \mu_f \frac{du}{dy} \quad (2.20)$$

Figura 3. Comparación del comportamiento de un fluido Bingham y un fluido Newtoniano.

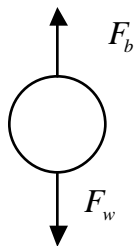


Fuente: Los Autores

Sin embargo en este trabajo se propone un modelo en el cual se calcula el arrastre que el fluido ejerce sobre la partícula y para el desarrollo de este se enuncian las siguientes suposiciones:

- Las partículas son esféricas
- El peso de las partículas (F_w) es igual a la fuerza de flotación (F_b) producida por cada una de ellas (Figura 4).
- Las partículas están distribuidas uniformemente en todo el fluido.
- Las partículas en el comienzo están estáticas y están sumergidas en un flujo potencial de velocidad constante V_f

Figura 4. Peso de las partículas igual a la fuerza de flotación



Fuente: Los Autores

El número de Reynolds para las partículas se halla por medio de:

$$\text{Re}_p = \frac{V_{rel} d_p}{\nu_f} \quad (2.21)$$

En este caso el máximo valor del Número de Reynolds antes de pasar a la zona de transición es de 1000. Adicionalmente se conoce que para esta configuración el coeficiente de arrastre en flujo laminar es:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}_p} \quad (2.22)$$

y que este coeficiente de arrastre también se puede expresar por medio de:

$$C_D = \frac{F_{Di}}{\frac{1}{2} \rho_f V_{rel}^2 A_{par}} \quad (2.23)$$

donde F_{Di} es la fuerza de resistencia o arrastre de cada partícula y A_{par} es el área transversal de la partícula. Reemplazando (2.21) y (2.22) en (2.23) se llega a:

$$F_{Di} = 3\pi\mu_f V_{rel} d_p \quad (2.24)$$

Ahora a partir de esta última ecuación y usando la 2ª ley de Newton se puede plantear la siguiente ecuación diferencial para la velocidad de la partícula V_p :

$$m_p \frac{dV_p}{dt} = 3\pi\mu_f d_p (V_f - V_p) \quad (2.25)$$

Resolviendo la ecuación anterior y usando las condiciones iniciales $V_p(0) = 0$, se llega a:

$$V_p = V_f \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu_f d_p t}{m_p}} \right) \quad (2.26)$$

Si se evalúa el límite cuando $t \rightarrow \infty$, se llega a que la máxima velocidad que puede tener la partícula es la del fluido y que esta velocidad se alcanza en un muy pequeño intervalo de tiempo por lo que el efecto de la fuerza de arrastre sobre las partículas es despreciable.

Teniendo en cuenta que la máxima velocidad relativa se presenta cuando las partículas están estáticas, es decir cuando la velocidad de la partícula es cero y la velocidad relativa es igual a la velocidad del fluido, se puede hallar una expresión para el Número de Reynolds en función de la velocidad del pistón. Si en la

ecuación (2.21) se reemplaza la velocidad relativa por la velocidad del fluido y esta a su vez se reemplaza usando la ecuación (2.17) se llega a:

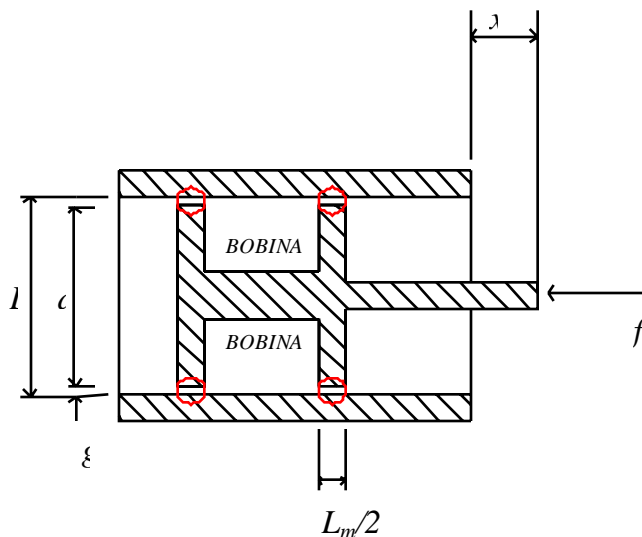
$$\text{Re}_p = \frac{d_p \cdot d^2 \cdot \dot{x}}{v_f (D^2 - d^2)} \quad (2.27)$$

Con esta última ecuación se puede encontrar el valor máximo de la velocidad del pistón antes de entrar en el régimen de transición.

2.3 EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO

En esta parte del modelo se propone un método para calcular la fuerza magnética como una función de la corriente en la bobina que esta integrada al pistón. Considerando la geometría del pistón - bobina mostrada en la Figura 5

Figura 5. Esquema del pistón – bobina y el cilindro.



Fuente: Los Autores

Teniendo en cuenta que las fuerzas magnéticas son solo de atracción se puede suponer que las partículas son atraídas hacia las paredes del pistón por las que esta circulando el flujo magnético. Este flujo circula perpendicular a la superficie del pistón que esta encerrada por unos círculos en la Figura anterior. Al suponer que las partículas se están adhiriendo al pistón – bobina, se esta suponiendo que la restricción anular se hace cada vez más pequeña. De esta manera se esta creando un AMR controlable por medio del tamaño de su restricción anular. Cabe resaltar que el tamaño de esta restricción se controla por medio de la corriente que pasa por la bobina.

Para calcular la fuerza magnética sobre las partículas se propone la siguiente ecuación:

$$F_m \cong \frac{(NI)^2 \mu_0 S_a}{2l_a^2} \quad (2.28)$$

donde N es el número de espiras de la bobina, S_a es el área del pistón – bobina por la cual circulan de manera perpendicular las líneas de flujo magnético y l_a es la distancia que hay entre las partículas y las paredes del pistón – bobina.

Aquí se van a proponer dos formas de modelar el efecto del campo magnético en el comportamiento del amortiguador. La primera tiene en cuenta la fuerza magnética y el peso de la partícula y la segunda tiene en cuenta a la fuerza magnética, al peso y al arrastre sobre las partículas.

2.3.1 Planteamiento del modelo incluyendo solo el peso de las partículas.

A continuación se hace un recuento de los pasos a seguir para calcular el nuevo diámetro del pistón:

- A. Se calcula la fuerza magnética sobre cada partícula usando la expresión (2.28), suponiendo que la restricción anular esta llena de partículas para ver cuantas de ellas son atrapadas.
- B. A la fuerza calculada en el paso anterior se le resta el peso de la partícula. Esta fuerza esta en función de la corriente y l_a , y se calcula para diferentes velocidades del pistón dentro del rango para flujo laminar.
- C. Se calcula la fuerza total que la bobina puede ejercer sobre toda la restricción anular para cuantificar el número de partículas que se pueden atrapar.
- D. Con el número de partículas atrapadas se calcula el volumen que ocupan las mismas.
- E. Se calcula el nuevo volumen disponible para el paso de fluido.
- F. Con este nuevo volumen se encuentra el nuevo diámetro del pistón.
- G. Con el nuevo diámetro del pistón se procede a encontrar el nuevo valor de la constante C del amortiguador.

Esta constante debe tener en cuenta que hay una parte en la que el diámetro del pistón se reduce d_m (este depende de la corriente y la fuerza de arrastre) y otra parte en la que el diámetro se mantiene constante (a lo largo de la bobina).

Suponiendo que todo el espacio entre el pistón y el cilindro esta ocupado por las partículas ferromagnéticas y usando la ecuación (2.28) se puede calcular cual es la fuerza magnética que actúa sobre cada partícula. A esta última se le resta el peso de la partícula que es esta fuerza que debería vencer el campo magnético para atrapar las partículas en las paredes del pistón – bobina. A partir de esto se puede plantear la siguiente expresión:

$$\sum F_p = F_{mp} - F_w \quad (2.29)$$

donde $\sum F_p$ es la sumatoria de fuerzas sobre las partículas.

La ecuación anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum F_p = \frac{(NI)^2 \mu_0 S_a}{2l_a^2} - F_w \quad (2.30)$$

Con la expresión anterior se puede calcular cual es la fuerza total que actúa en el espacio entre el pistón - bobina y el cilindro por medio de la siguiente sumatoria:

$$F_g = \sum \left(\frac{(NI)^2 \mu_0 S_a}{2l_{ai}^2} - F_w \right) \quad (2.31)$$

En esta última expresión l_{ai} corresponde a las diferentes distancias de separación entre las partículas y el pistón – bobina. Esta distancia tiene el siguiente rango de valores:

$$\frac{d_p}{2} \leq l_{ai} \leq \frac{D-d}{2} - d_p \quad (2.32)$$

Con F_g se puede calcular cual es el numero de partículas que atrae la bobina usando el peso de las partículas

$$N_p = \frac{F_g}{F_w} \quad (2.33)$$

Hay que tener en cuenta que la fuerza magnética en algunas ocasiones no atrapara ninguna partícula y que en otras atrapara más de las que podrían ocupar el espacio entre el pistón y el cilindro. Por ello es importante calcular cual es el

numero máximo de partículas que puede atrapar el pistón usando la siguiente expresión

$$N_{p \max} = \sum_1^{\frac{D-d}{2d_p}} \left(\frac{\pi(d + id_p) L_m}{d_p d_p} \right) \quad (2.34)$$

donde L_m es la longitud del pistón en las que las líneas campo magnético actúan sobre las partículas.

Ahora se calcula cuantas partículas atrapa realmente el pistón – bobina (N_{pr}) por medio de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{Si } N_p \leq 0 & \Rightarrow N_{pr} = 0 \\ \text{Si } 0 < N_p \leq N_{p \max} & \Rightarrow N_{pr} = N_p \\ \text{Si } N_p > N_{p \max} & \Rightarrow N_{pr} = N_{p \max} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Con el valor seleccionado de N_{pr} se puede calcular el volumen ocupado por las partículas, sin embargo, aquí se plantea un factor de empaquetamiento (FE) debido a que las esferas no pueden ocupar todo el volumen existente entre el pistón y el cilindro. Este FE se calcula por medio de la siguiente relación:

$$FE = \frac{\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_p}{2} \right)^3}{d_p^3} = \frac{\pi}{6} \quad (2.36)$$

Y con este FE se puede evaluar cual es el volumen ocupado por las partículas que están atrapadas entre el pistón y el cilindro

$$V_{op} = (FE) N_{pr} \frac{\pi}{6} (d_p)^3 \quad (2.37)$$

Este ultimo volumen es restado al volumen original del anillo entre el pistón – bobina y el cilindro obteniendo el nuevo volumen de este espacio

$$V_{gn} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) L_m - (FE) N_{pr} \frac{\pi}{6} (d_p)^3 \quad (2.38)$$

Con el volumen que se obtiene en la ecuación anterior se puede obtener cual es el nuevo valor del diámetro del pistón en la región en la que actúa el campo magnético planteando la siguiente igualdad

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d_m^2)L_m = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)L_m - (FE)N_{pr} \frac{\pi}{6}(d_p)^3 \quad (2.39)$$

donde d_m es el nuevo diámetro del pistón – bobina en la región en la que actúa el magnetismo. Al despejar se obtiene:

$$d_m = \sqrt{d^2 + \frac{2}{3L_m}(FE)N_{pr}(d_p)^3} \quad (2.40)$$

Recordando que se había establecido la fuerza del amortiguador por medio de la ecuación (2.14) y teniendo en cuenta los cambios en el diámetro del pistón bobina se puede plantear la siguiente ecuación

$$f = \left(\frac{d^3 L_b}{(D-d)^3} + \frac{d_m^3 L_m}{(D-d)^3} \right) 6\pi\mu_f \dot{x} \quad (2.41)$$

donde L_b es la longitud de la bobina del pistón.

2.3.2 Planteamiento del modelo incluyendo el peso de las partículas y el arrastre sobre las mismas.

Al incluir el arrastre sobre las partículas el desarrollo del modelo sufre unas pequeñas variaciones, Por ejemplo la ecuación (2.29) se plantea de la siguiente manera:

$$\sum F_p = F_{mp} - F_w - F_{Di} \quad (2.42)$$

La ecuación anterior se puede expresar nuevamente así:

$$\sum F_p = \frac{(NI)^2 \mu_0 S_a}{2l_a^2} - F_w - \frac{3\pi\mu_f d^2 d_p}{D^2 - d^2} \dot{x} \quad (2.43)$$

Ahora, para calcular la fuerza de arrastre se supone que el diámetro del pistón no cambia a pesar que el pistón – bobina este atrapando algunas partículas debido a la acción de la corriente.

Con la ecuación (2.43) se puede calcular cual es la fuerza total que actúa en el espacio entre el pistón y la bobina usando la siguiente sumatoria

$$F_g = \sum \left(\frac{(NI)^2 \mu_0 S_a}{2l_{ai}^2} - F_w - \frac{3\pi\mu_f d^2 d_p \dot{x}}{D^2 - d^2} \right) \quad (2.44)$$

El rango de valores para l_{ai} no cambia, y las ecuaciones (2.33) hasta (2.41) no tienen cambios en su estructura.

3 SIMULACIONES Y RESULTADOS

La tabla que se encuentra a continuación brinda los parámetros con los que fueron llevadas a cabo las simulaciones en las que se varió el número de espiras de la bobina y por ende el valor de L_b , mientras que el valor de L_m se mantuvo constante.

Tabla 1. Valores de las variables para la realización de las simulaciones

Restricción Anular (g)	1 mm
Longitud del Pistón (L)	44 mm
Longitud de la Bobina (L_b) para 370 espiras	28 mm
Longitud Magnética (L_m)	16 mm
Diámetro del pistón (d)	30,5 mm
Diámetro del Cilindro (D)	32,5 mm
Diámetro de la partícula (D_p)	0,159 mm
Masa de la partícula (m_p)	1,43X10-8 kg
Densidad de la partícula ATOMET 1001 (ρ_p)	6800 kg/m ³
Densidad fluido NUTU H32 (ρ_f)	872 kg/m ³
Viscosidad Dinámica NUTU H32 (μ_f)	7,29X10-2 kg/(m*sec)
Diámetro del alambre de la bobina (d_a)	0,75 mm
Permeabilidad del espacio vacío (μ_0)	1,25664X10-6 N/A ²
Gravedad (g_g)	9,81 m/s ²

Fuente: Los Autores

Lo primero que se encontró por medio de las simulaciones fue el valor máximo de velocidad del pistón para el que la consideración de flujo laminar se mantiene. Usando la ecuación (2.19) se encuentra que la máxima velocidad del pistón con la que se puede considerar régimen laminar dentro de las palcas planas es de:

$$\dot{x} = 13 \frac{m}{s} \quad (3.1)$$

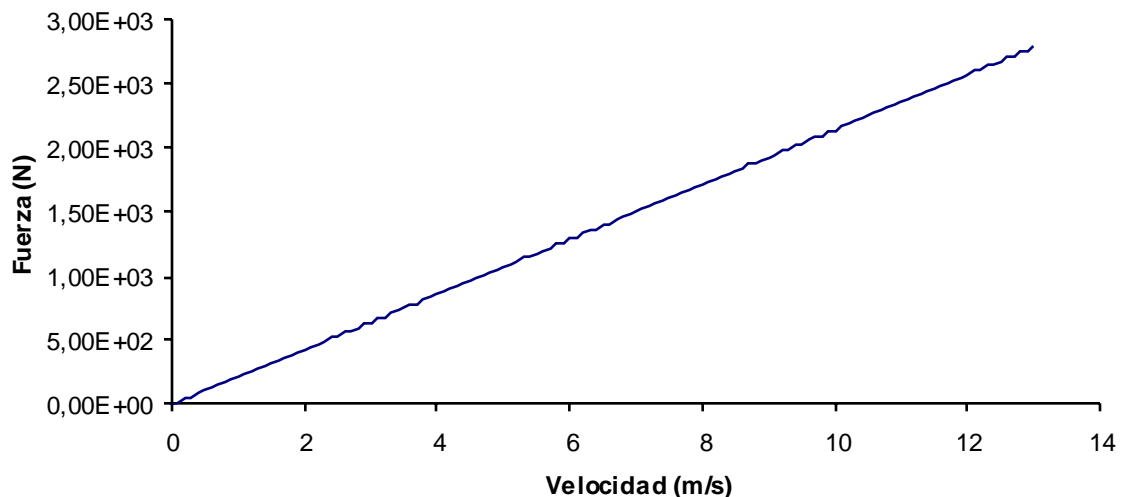
Al considerar el Número de Reynolds para la partícula usando la ecuación (2.27) se encuentra que la máxima velocidad del pistón es:

$$\dot{x} = 71,2 \frac{m}{s} \quad (3.2)$$

3.1 COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

Recordando que la ecuación (2.14) relaciona la fuerza del amortiguador con la velocidad del pistón se puede observar este comportamiento viscoso por medio del siguiente gráfico

Gráfica 1. Comportamiento del amortiguador bajo la influencia única del componente viscoso



Fuente: Los Autores

3.2 INFLUENCIA DE LAS PARTÍCULAS

De acuerdo a la ecuación (2.26) el efecto de las partículas en el fluido (en ausencia de un campo magnético) no perdura en el tiempo. Se puede entonces calcular la constante de tiempo del sistema y observar que tan rápido las partículas alcanzan la velocidad del fluido. Para ello se plantea:

$$\lambda = -\frac{m_p}{3\pi\mu_f d_p} \quad (3.3)$$

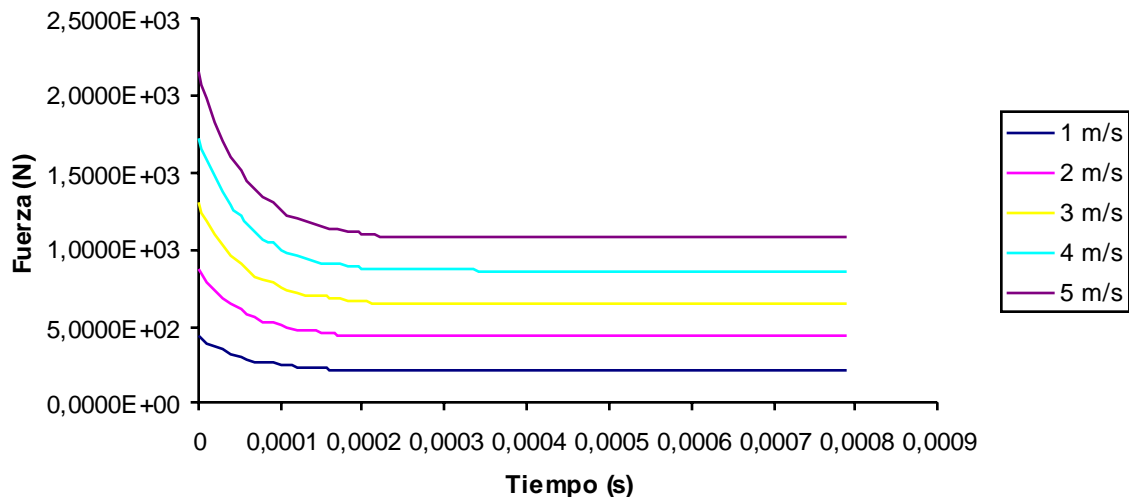
Reemplazando los valores que se determinaron para la simulación en la Tabla 1 se encuentra que el valor de λ es $206.113 \times 10^{-6} \text{s}$ y buscando el valor del tiempo en el que la partícula alcanza el 98% del valor de la velocidad del fluido se llega a:

$$t = 3.91\lambda \quad (3.4)$$

Esto quiere decir que la partícula alcanza la velocidad del fluido en un tiempo igual a $805 \times 10^{-6} \text{s}$.

La intrascendencia de las partículas en el fluido se puede evidenciar en la siguiente gráfica

Gráfica 2 Fuerza del amortiguador incluyendo el componente viscoso y las partículas



Fuente: Los Autores

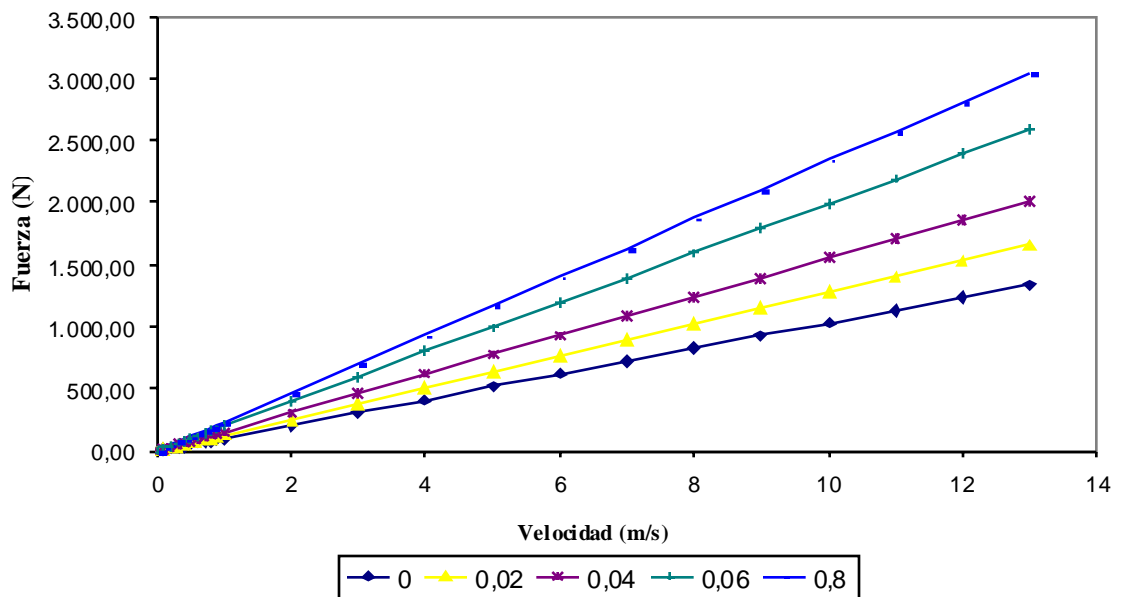
3.3 EFECTO DEL CAMPO MAGNÉTICO

Es importante resaltar que las simulaciones realizadas para observar la influencia del campo magnético en el comportamiento del AMR se dividieron en dos al igual que en el modelo en donde se considera primero el peso de las partículas únicamente y después se considera el peso y el arrastre de las partículas.

3.3.1 Influencia del campo magnético y el peso en el comportamiento del AMR

A continuación se muestran los resultados de varias simulaciones en las que la fuerza esta en función de la velocidad del pistón para diferentes valores de corriente. Adicionalmente se puede calcular el valor de la constante de amortiguamiento para diferentes valores de corriente

Gráfica 3. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC (N=49)



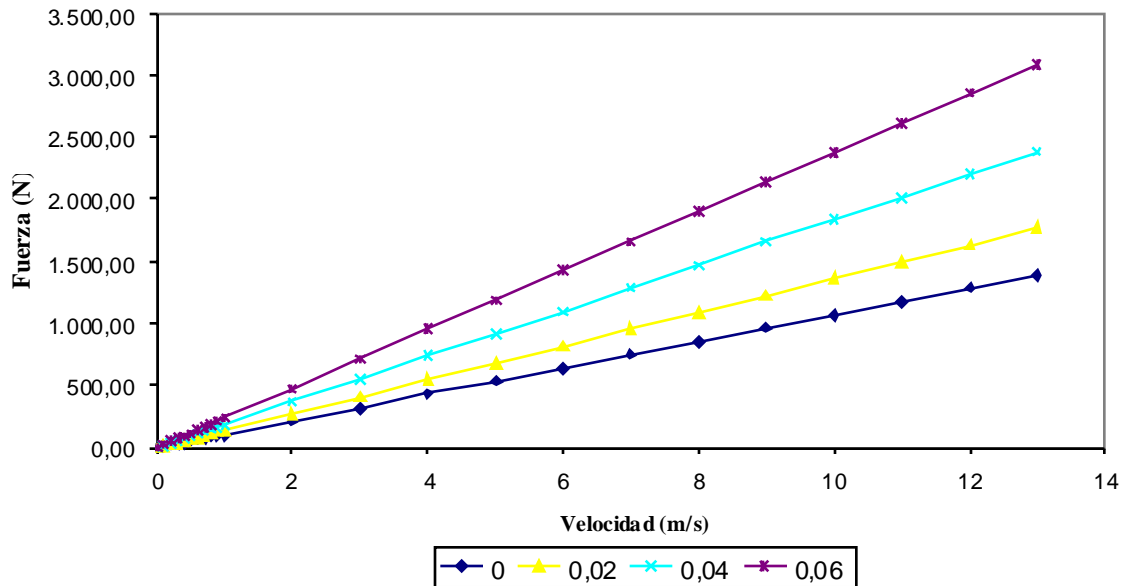
Fuente: Los Autores

Tabla 2. Valores de la constante de amortiguamiento para diferentes corrientes (N=49)

Corriente (A)	Constante de amortiguamiento (kg/s)
0	103,55
0,02	128,21
0,04	155,4
0,06	199,64
0,8	234,47

Fuente: Los Autores

Gráfica 4. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC (N=64)



Fuente: Los Autores

Tabla 3. Valores de la constante de amortiguamiento para diferentes corrientes (N=64)

Corriente (A)	Constante de amortiguamiento (kg/s)
0	103,55
0,02	136,11
0,04	184,05
0,06	238,13

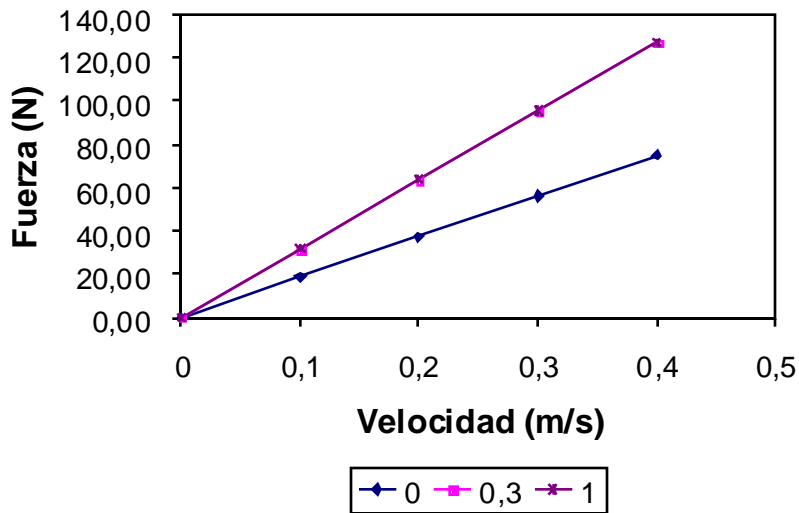
Fuente: Los Autores

Tabla 4. Valores de la constante de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes corrientes (N=370)

Corriente (A)	Constante de amortiguamiento (kg/s)
0	187,61
0,3	318,53
1	318,53

Fuente: Los Autores

Gráfica 5. Fuerza de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes valores de CC (N=370)

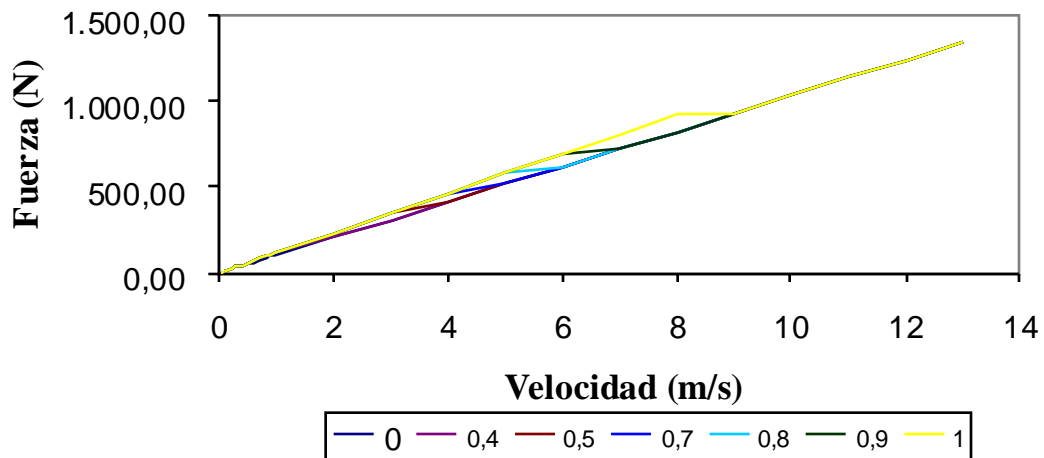


Fuente: Los Autores

3.3.2 Influencia del campo magnético, el peso y el arrastre de las partículas en el comportamiento del AMR

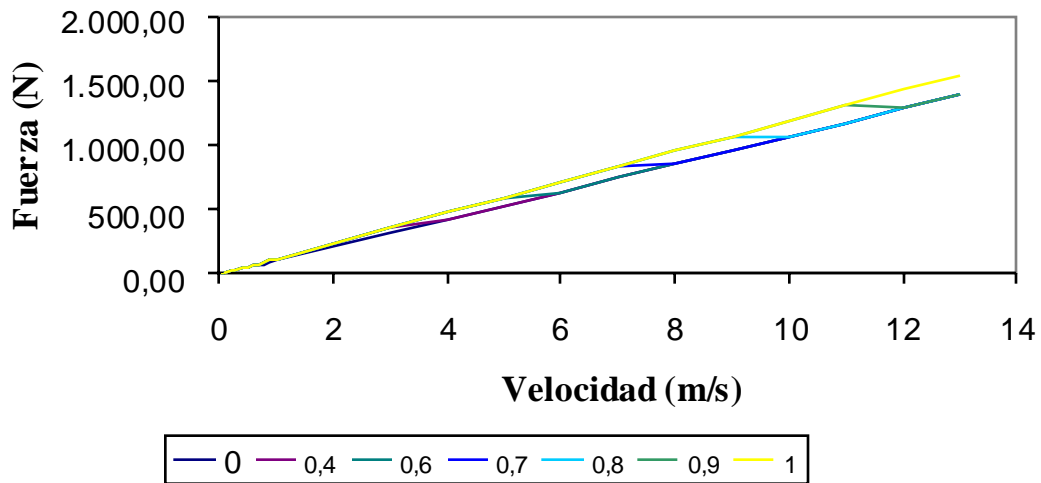
Nuevamente se muestran los resultados de diferentes simulaciones en las que la fuerza del AMR es función de la velocidad del pistón para diferentes valores de corriente. También se presentan los valores de la constante de amortiguamiento para los diferentes valores de corriente.

Gráfica 6. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC (N=49)



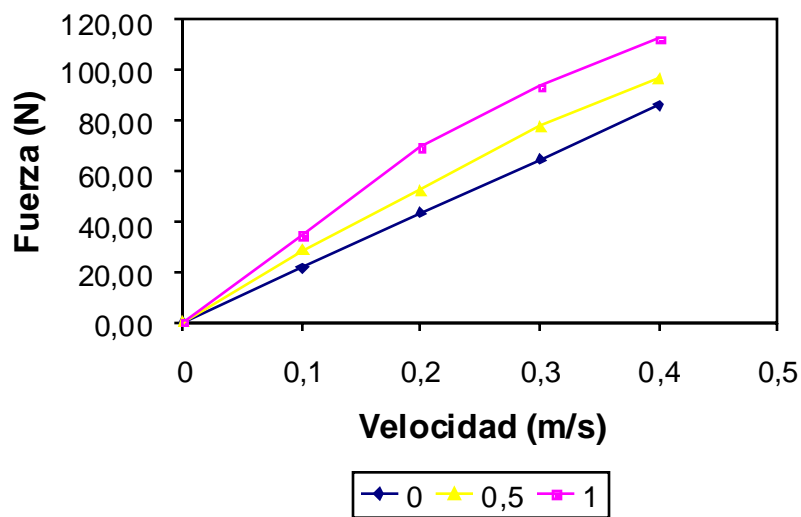
Fuente: Los Autores

Gráfica 7. Fuerza de amortiguamiento para diferentes valores de CC (N=64)



Fuente: Los Autores

Gráfica 8. Fuerza de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes valores de CC (N=370)



Fuente: Los Autores

Tabla 5. Valores de la constante de amortiguamiento a bajas velocidades para diferentes corrientes (N=370)

Corriente (A)	Constante de amortiguamiento (kg/s)
0	214,41
0,5	242,31
1	283,25

Fuente: Los Autores

4 NUMEROS ADIMENSIONALES

Siguiendo el teorema de Π Buckingham primero se deben determinar las n variables que pueden ser funciones unas de las otras, en este caso se proponen las siguientes 12:

L_m = longitud del pistón donde actúa el campo magnético $[L]$

d_a = diámetro del alambre $[L]$

g = espacio entre el pistón y el cilindro $[L]$

L_b = longitud de la bobina $[L]$

I = corriente $[A]$

μ_f = viscosidad dinámica del fluido $\left[\frac{M}{Lt}\right]$

μ_0 = permeabilidad del espacio vacío $\left[\frac{ML}{t^2 A^2}\right]$

\dot{x} = velocidad del pistón $\left[\frac{L}{t}\right]$

d_p = diámetro de la partícula $[L]$

ρ_{MRF} = densidad del fluido magnetoreológico $\left[\frac{M}{L^3}\right]$

f = fuerza del amortiguador $\left[\frac{ML}{t^2}\right]$

g_g = gravedad $\left[\frac{L}{t^2}\right]$

La ρ_{MRF} se determinó por medio de la siguiente ecuación:

$$\rho_{FMR} = \left(\frac{\rho_f \rho_p}{(\%wt_f) \rho_p + (\%wt_p) \rho_f} \right) \quad (4.1)$$

donde $\%wt_f$ y $\%wt_p$ son respectivamente el porcentaje en peso de fluido y de partículas en la suspensión, y ρ_p es la densidad de la partícula.

Ahora se determina k que es el número de más grande de variables entre las n que pueden ser combinadas en un grupo adimensional. En este caso son I , \dot{x} ,

ρ_{MRF} , d_a . Mientras que el número de dimensiones independientes m es 4 [M , L , t , A]. De esta manera se pueden plantear 8 números adimensionales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= f_1(L_m, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_2 &= f_2(g, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_3 &= f_3(L_b, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_4 &= f_4(d_p, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_5 &= f_5(\mu_f, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_6 &= f_6(\mu_0, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_7 &= f_7(f, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a) \\ \Pi_8 &= f_8(g_g, I, \dot{x}, \rho_{FMR}, d_a)\end{aligned}$$

A continuación se ejemplifica el desarrollo para Π_1

$$M^0 L^0 t^0 I^0 = [L]^a [A]^b \left[\frac{M}{L^3} \right]^c \left[\frac{L}{t} \right]^d [L]^e \quad (4.2)$$

De la anterior ecuación se plantean las siguientes ecuaciones

$$M : 0 = c \quad (4.3)$$

$$L : 0 = a - 3c + d + e \quad (4.4)$$

$$t : 0 = -d \quad (4.5)$$

$$A : 0 = b \quad (4.6)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para e se llega a:

$$\Pi_1 = \left(\frac{d_a}{L_m} \right)^e \quad (4.7)$$

Finalmente e puede tomar cualquier valor, en este caso se le asigna la unidad (1) para obtener

$$\Pi_1 = \left(\frac{d_a}{L_m} \right) \quad (4.8)$$

De esta manera se obtiene los demás grupos adimensionales

$$\Pi_2 = \left(\frac{d_a}{g} \right) \quad (4.9)$$

$$\Pi_3 = \left(\frac{L_b}{d_a} \right) \quad (4.10)$$

en este es importante resaltar que puede relacionar el numero de vueltas de la bobina

$$\Pi_4 = \left(\frac{d_a}{d_p} \right) \quad (4.11)$$

$$\Pi_5 = \left(\frac{d_a \rho_{FMR} \dot{x}}{\mu_f} \right) \quad (4.12)$$

este número adimensional tiene la misma forma del número de Reynolds que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas.

$$\Pi_6 = \left(\frac{d_a^2 \rho_{FMR} \dot{x}^2}{\mu_0 I^2} \right) \quad (4.13)$$

$$\Pi_7 = \left(\frac{d_a \rho_{FMR} \omega^2 \dot{x}}{f \omega^2} \right) \quad (4.14)$$

$$\Pi_8 = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{g_s d_a}} \right) \quad (4.15)$$

este número tiene la misma forma del número de Fraude que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas gravitacionales.

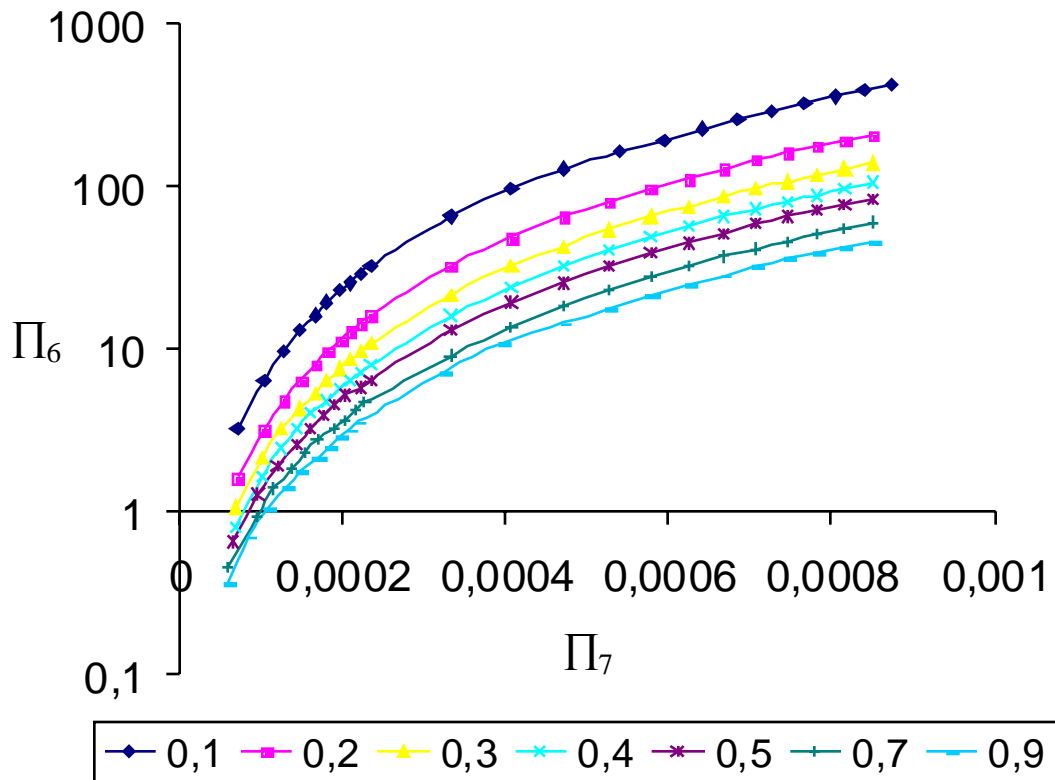
Los más representativos son Π_6 y Π_7 y en ellos se va a reemplazar a d_a obteniendo

$$\Pi_6 = \left(\frac{L_b \rho_{FMR} \omega^2 \dot{x}}{\mu_0 \omega^2 N I} \right) \quad (4.16)$$

$$\Pi_7 = \left(\frac{L_b \rho_{FMR} \omega^2 \dot{x}}{N f \omega^2} \right) \quad (4.17)$$

Aquí es importante resaltar que en Π_6 el denominador esta representando una fuerza magnética mientras que el numerador esta representando una fuerza inercial. Con estos dos números adimensionales se pretende dar una relación entre \dot{x} , I y f que permita encontrar, por ejemplo, la fuerza del amortiguador conociendo el valor de la corriente y la velocidad. Esto se puede observa en la siguiente gráfica que fue obtenida para diferentes valores de corriente en el pistón - bobina y en la que μ_0 , L_b , ρ_{FMR} y N no cambian.

Gráfica 9. Curvas adimensionales para diferentes valores de CC en el pistón - bobina.



Fuente: Los Autores

Ahora ese puede plantear un ejemplo de diseño: se supone que la CC en la bobina es de 1A, el diámetro del alambre de la bobina es de 0,5 mm y la densidad del FMR es de 2000 kg/m³; y se quiere encontrar que velocidades del pistón y fuerzas de amortiguamiento se pueden obtener en esas condiciones. Para tal fin se pueden encontrar varias parejas de Π_6 y Π_7 y a partir de ellas encontrar diferentes valores de fuerza para diferentes velocidades. Si Π_6 tiene un valor de 300 y Π_7 de 0,0065 se encuentra que la velocidad del pistón puede ser de 20 m/s y la fuerza de 68,98 N. Sin embargo si se mantienen los valores en las diferentes variables con los que se realizó la simulación se debe recordar que la máxima velocidad del pistón es de 13 m/s, por lo que se debe buscar una nueva pareja de puntos para hallar velocidades dentro del flujo laminar.

5 CONCLUSIONES

Se propuso un modelo de comportamiento de un MRD. Este modelo incluye el efecto de las fuerzas viscosas, el arrastre de las partículas y las fuerzas magnéticas.

Incluir el efecto de las partículas en el fluido en ausencia de una fuerza magnética no influencia el desarrollo del modelo

La utilización de números adimensionales en AMR comerciales no es útil para encontrar otras variables de diseño de estos dispositivos.

El modelo predice las velocidades límites para una respuesta lineal en diferentes configuraciones.

El modelo predice el rango de corriente eléctrica de operación, sin embargo los rangos varían dependiendo si se incluye el arrastre sobre las partículas.

Los números adimensionales que aquí se proponen puede ser una herramienta de diseño, pues con ellos se podrían obtener una aproximación de algunas características finales del dispositivo.

El modelo que aquí se presenta brinda una alternativa diferente a la de los demás modelos que se basan en un fluido Bingham.

6 BIBLIOGRAFIA

- [1] AHMADIAN, M & NORRIS, J. Behavior of Magneto-Rheological Fluids Subject to Impact and Shock Loading en *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 2003. ASME. Paper number 42891
- [2] CARLSON, J. David. Permanent-electromagnet Systems. Engineering Note. LORD Corporation. 7 páginas. 2002.
- [3] CARLSON, J. David. 2001. What makes a good MR fluid?. *8th International Conference on Electrorheological (ER) Fluids and Magneto-rheological (MR) Suspensions*.
- [4] CORRAL, O; LETELIER, M; ROULIEZ, J. P & SIGINER D. Mathematical Modeling of Magneto-Hydrodynamic Dampers with Time-Varying Fluid Properties. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. 2005. ASME. Artículo Número 81172.
- [5] DU, HAIPING; LAM, JAMES & ZHANG, NONG. Modelling of a magneto-rheological damper by evolving radial basis function networks. 2006. *Artificial Intelligence*. 13 páginas.
- [6] FISHBANE, Paul; GASIOROWICZ, Stephen & THORNTON, Stephen T. *Física para Ciencias e Ingeniería Volumen II*. 1994. Prentice Hall. México.
- [7] GIBILARO, L. G. *Fluidization-dynamics*. Oxford. Butterworth-Heinemann. 2001.
- [8] HONG, Sung-Ryong; JOHN, Shaju & WERELEY, Norman M. Quasi-steady Herschel-Bulkley analysis of magnetorheological dampers with preyield viscosity. 2005. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. ASME. Artículo Número 82593.
- [9] JOLLY, Mark R; BENDER, Jonathan W.; & CARLSON, J. David. Properties and Applications of Commercial Magnetorheological Fluids. En *J. Intelligent Material Systems and Structures*. 1999
- [10] LORD, Material Division. 1999. Designing with MR fluids. 5 páginas.

- [11] MILECKI, Andrzej. Investigation and control of magneto-rheological fluid dampers. En *International Journal of Machine Tools & Manufacture*. 13 páginas. 2001.
- [12] OLABI, A.G. & GRUNWALD, A. Design and Application of Magneto-rheological Fluid. En *Materials & Design*. 7 páginas. 2006.
- [13] POYNOR, J. C. *Innovate Desings for Magnetorheological Dampers*. Blacksburg, VA. 2001. M.S. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University
- [14] SERWAY, Raymond & JEWETT, John. Física para Ciencia e Ingeniería, Volumen II. McGraw-Hill. Mexico. 3a edición.
- [15] SONG, XUBIN; AHMADIAN, MEHDI; SOUTHWARD, STEVE & MILLER, Lane. Parametric study of nonlinear adaptive control algorithm with magneto-rheological suspension systems. En *Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2007. 24 páginas.
- [16] WHITE, Frank M. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill. España, 1983.