PROPIEDADES CUÁNTICAS DE LA LUZ PARAXIAL CON MOMENTO ANGULAR

Juan Pablo Rojas

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La principal motivación para realizar este trabajo es investigar las propiedades cuánticas de la luz con momento angular orbital dentro del límite paraxial, además del momento angular de espin intrínseco de los fotones debido a su naturaleza bosónica. Esta motivación surge de la gran importancia de este tópico dentro del campo de la óptica cuántica por su relevancia histórica y las grandes posibilidades de investigación que ofrece.

El interés del estudio del momento angular de la luz nace hace ya casi un siglo por parte de A. Einstein [1] y Poynting [2]. Ellos fueron los primeros en predecir que la luz era capaz de transmitir momento angular al igual que transmitia momento lineal, como habían demostrado en sus estudios de interacción entre la radiación y la materia. Desde ese entonces, varios experimentos fueron propuestos y años mas tarde se lograron realizar.

Más adelante, con los avances en la investigación de la mecánica cuántica, se logró cuantizar los campos de radiación y describir esta clase de luz desde el punto de vista de vectores en el espacio de Hilbert y operadores lineales que representaran observables. De esta manera se logró obtener luz con momento angular que no sólo provenía de experimentos clásicos, como los generados por hologramas o lentes cilíndricos, sino también de los experimentos producidos con átomos de tres niveles, estos últimos eran representados, obviamente, por operadores escalera de dos modos de radiación ortogonales.

Este nuevo campo de investigación abrió nuevos horizontes en el estudio de varias disciplinas en las cuales se aplica con gran éxito la óptica cuántica, como son la materia condensada, la criptología, la física de la información, o dentro de los importantes avances que se están logrando en el campo de la computación cuántica.

Dentro de los avances alcanzados en el estudio de la luz con momento angular vemos el uso de cierta solución particular de la ecuación de Helmholtz, la cual se conoce como la *ecuación de onda paraxial*. Esta ecuación es de gran importancia dentro de la *teoría paraxial de la luz*, debido a que ofrece soluciones analíticas a varios tipos de luz muy importantes en varios campos de investigación, incluyendo el que tratamos en este documento. Una de las soluciones de esta ecuación paraxial son los modos Hermite-Gauss (HG), que son muy relevantes en la física moderna debido a su capacidad de expresar estados usados en diversos tópicos de la óptica cuántica, como los estados coherentes o los estados comprimidos. Esta clase de estados, aunque son necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo, poseen cierta relevancia dentro del objetivo primario de este documento ya que no poseen, por sí mismos, momento angular. Por otro lado, cierta combinación de estos estados crea lo que se conoce como modos Laguerre-Gauss (LG). Estos estados también son una solución analítica de la ecuación de onda paraxial y además poseen momento angular, lo que los hace tener un papel muy importante dentro del desarrollo de este trabajo.

En el capítulo 1 haremos una introducción a la electrodinámica clásica tratando tópicos específicos que serán de interés durante el resto del documento. En el capítulo 2 encontraremos una aproximación a la teoría paraxial de la luz, la ecuación de onda paraxial y las soluciones analíticas, que son de interés dentro del desarrollo de nuestro trabajo. En el capítulo 3 encontraremos la cuantización del campo paraxial, y en el capítulo 4 veremos la luz paraxial con momento angular, la solución paraxial en términos de los modos LG, el operador de momento angular orbital que se construye a partir de estos campos y una solución particular.

Como es bien sabido, las ondas electromagnéticas portan, además de energía, momentum lineal y angular. En este documento se pretende establecer algunas propiedades de la luz con momento angular orbital, es decir, luz que tiene momento angular adicional al momento intríseco de espin que tienen los fotones. Para este propósito se quiere hacer un análisis de las ondas electromagnéticas desde el punto de vista clásico y cuántico para sintetizar el concepto primario de este trabajo.

1.1. Electrodinámica clásica

1.1.1. Ecuaciones de Maxwell

Hace ya más de un siglo, las leyes que regían la electrodinámica eran [3]: la ley de Gauss

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.1}$$

la ley de Gauss para magnetismo

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{1.2}$$

la ley de Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.3}$$

y la ley de Ampere

$$\nabla \times B = \mu_0 J. \tag{1.4}$$

Estas ecuaciones representaban las leyes que regían la teoría electromagnética en ese momento y fueron estas ecuaciones las que, básicamente, protagonizarían el trabajo de Maxwell posteriormente. Por aquel entonces, Maxwell encontró en estas ecuaciones una inconsistencia. Se trataba de cierta regla vectorial, la cual dice que la divergencia de un rotacional debe ser cero:
Sea G un campo vectorial:

$$\nabla \cdot (\nabla \times G) = 0, \tag{1.5}$$

para todo G.
Si aplicamos esta regla a la ley de Faraday tenemos:

$$\nabla \cdot (\nabla \times E) = -\frac{\partial(\nabla \cdot B)}{\partial t}. \tag{1.6}$$

El lado izquierdo de esta ecuación vemos que debe ser cero por la ley de cálculo vectorial que mencionamos, y también vemos que al lado derecho esta ecuación es cero también para cumplir la ley de Gauss para magnetismo. Pero si esta regla la aplicamos a la ley de Ampere tenemos como resultado algo que no es coherente:

$$\nabla \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 (\nabla \cdot J). \tag{1.7}$$

Vemos que el lado izquierdo de esta ecuación debe ser cero debido a la regla de cálculo antes mencionada, pero el lado derecho de esta ecuación no es necesariamente cero para un caso general.

Para resolver esta inconsistencia, Maxwell aplicó la ley de Gauss a la ecuación de continuidad de carga y encontró lo siguiente:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \nabla \cdot E) = -\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right). \tag{1.8}$$

Aquí Maxwell encontró lo que se definió como la *corriente de desplazamiento de Maxwell*:

$$J_d = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1.9}$$

Esta corriente de desplazamiento aparece en casos especiales como en el momento en que se está cargando un capacitor.

De esta manera las ecuaciones de Maxwell quedan:

la ley de Gauss

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.10}$$

la ley de Gauss para magnetismo

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{1.11}$$

la ley de Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.12}$$

y la ley de Ampere-Maxwell

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right). \tag{1.13}$$

Con base en estas ecuaciones, la electrodinámica ha evolucionado más de un siglo de historia y en ellas se construye, entre otras cosas, la óptica moderna, tópico escencial para el desarrollo de este documento.

1.1.2. Ondas electromagnéticas

Con las ecuaciones de Maxwell se puede encontrar la descripción completa de las ondas electromagnéticas [4]. En esta sección veremos cómo se construyen las ondas de luz clásicamente.
Tendremos en cuenta para esta deducción el caso específico de ondas electromagnéticas expandiéndose en el medio especial no conductor del vacío, es decir, ondas en el espacio libre. Esto implica:

$$\sigma = 0, \tag{1.14}$$

$$\rho = 0, \tag{1.15}$$

$$\chi_e = 0 \tag{1.16}$$

y

$$\chi_m = 0. \tag{1.17}$$

Bajo estas condiciones las ecuaciones de Maxwell se leen:

$$\nabla \cdot E = 0, \tag{1.18}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{1.19}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.20}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1.21}$$

Como esperamos obtener de estas ecuaciones la función de onda de las ondas electromagnéticas, veremos cómo se comportan las segundas derivadas de estas ecuaciones

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\nabla \times E)}{\partial t}. \tag{1.22}$$

Si esperamos que la función de campo eléctrico tenga un buen comportamiento podemos intercambiar las derivadas espaciales y temporales sin ningún problema, y si cambiamos el rotacional del campo eléctrico por la expresión dada en la ecuación (1.20) tenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \tag{1.23}$$

Ahora, si utilizamos la identidad de opradores del triple producto vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2, \tag{1.24}$$

tendríamos que podemos escribir la parte izquierda de la ecuación (1.23) como:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B. \tag{1.25}$$

La primera parte sabemos que es cero por la ley de Gauss para magnetismo, ecuación (1.19). De esta manera tenemos finalmente:

$$\nabla^2 B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}. \tag{1.26}$$

Esta ecuación nos revela el comportamiento ondulatorio del campo magnético dentro de una onda electromagnética. Haremos un procedimiento similar para el campo eléctrico:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial(\nabla \times B)}{\partial t}. \tag{1.27}$$

Si reemplazamos la parte derecha de esta ecuación por lo que tenemos en la ecuación (1.21) tenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \tag{1.28}$$

y si a la parte izquierda de esta ecuación tambien le aplicamos la identidad de operadores del producto triple obtenemos:

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \tag{1.29}$$

El primer término de la parte izquierda de esta ecuación es cero por la ecuación (1.18), lo que finalmente nos deja:

$$\nabla^2 E = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \tag{1.30}$$

Esta ecuación establece el comportamiento ondulatorio del campo eléctrico así como lo vimos en el magnético. Las ecuaciones (1.26) y (1.30) hacen la descrición completa de los campos dentro de una onda electromagnética desde el punto de vista clásico.

1.2. Leyes de conservación

Como es bien sabido, las ondas electromagnéticas son portadoras de energía, como cualquier otra onda, así como tambien momento lineal y angular. Para estos tres tópicos encontraremos expresiones adecuadas para manejarlos con las ondas electromagnéticas.

1.2.1. Energía en una onda electromagnética

Como es bien sabido, la energía guardada en un campo electromagnético es

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d^3 r. \tag{1.31}$$

Ahora, intentaremos deducir la ecuación (1.31) de forma más general utilizando las leyes de conservación de la energía.
Supongamos que tenemos un medio en el cual existe cierta carga y cierta corriente que generan un campo electromagnético en todo el medio. Si tenemos una carga q en este campo electromagnético y la movemos una pequeña distancia dl, conociendo la fuerza de Lorentz que actuaría sobre esta partícula

$$F = q(E + v \times B), \tag{1.32}$$

el trabajo dW que se gastaría es

$$dW = F \cdot dl = q(E + v \times B) \cdot dl = q(E + v \times B) \cdot vdt = qE \cdot vdt, \tag{1.33}$$

ya que sabemos que $v \times B$ y v son perpendiculares. Ahora, si tomamos como $q = \rho d^3 r$ y $\rho v = J$ podríamos escribir la potencia existente en una onda electromagnética como

$$\frac{dW}{dt} = \int (E \cdot J) d^3 r, \tag{1.34}$$

en donde vemos que evidentemente $E \cdot J$ es la energía por unidad de tiempo y por unidad de volumen que hay en la onda. Podemos ver que esta expresión puede variar un poco utilizando la ley de Ampere-Maxwell, ecuación (1.13), para eliminar J y que quede en términos de los campos únicamente

$$E \cdot J = \frac{1}{\mu_0} E \cdot (\nabla \times B) - \varepsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{1.35}$$

Luego, utilizando la identidad entre operadores,

$$\nabla \cdot (E \times B) = B \cdot (\nabla \times E) - E \cdot (\nabla \times B), \tag{1.36}$$

la ley de Faraday, ecuación (1.12), tenemos que

$$E \cdot (\nabla \times B) = -B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \cdot (E \times B), \tag{1.37}$$

y además sabiendo que

$$B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B^2) \tag{1.38}$$

y

$$E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E^2), \tag{1.39}$$

finalmente tenemos que

$$E \cdot J = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \frac{1}{\mu_0}\nabla \cdot (E \times B). \tag{1.40}$$

Poniendo esto dentro de la ecuación (1.34) tenemos que la potencia de una onda electromagnética es

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d^3r - \frac{1}{\mu_0}\int \nabla \cdot (E \times B)d^3r, \tag{1.41}$$

que aplicándole el teorema de la divergencia sobre el segundo término de la parte derecha nos queda

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d^3r - \frac{1}{\mu_0}\oint_{\mathcal{S}} (E \times B)d^2r, \tag{1.42}$$

donde $\mathcal{S}$ es evidentemente la superficie que está rodeando a $\mathcal{V}$. Esto es lo que se conoce como el *Teorema de Poynting*, que es el equivalente al teorema de trabajo y energía para las ondas electromagnéticas. De la ecuación (1.42) podemos ver que el primer término es la energía que está guardada en el campo electromagnético por lo que sabemos de la ecuación (1.31) y el segundo término es la razón a la que la energía está saliendo del volumen $\mathcal{V}$ a través de la superficie $\mathcal{S}$.

La energía que transporta la onda electromagnética, por unidad de área y por unidad de tiempo, es conocida como el *Vector de Poynting*, cuya expresión es

$$S = \frac{1}{\mu_0}E \times B. \tag{1.43}$$

Este vector también es conocido como *Densidad de Flujo de Energía*, ya que $S \cdot da$ sería la energía que atraviesa perpendicularmente el área da durante cierto tiempo determinado.

1.2.2. Momento lineal de una onda electromagnética

Al viajar, una onda electromagnética posee momento lineal, el cual está fuertemente ligado a la energía que transporta. Para obtener la expresión que corresponde al momento lineal, vamos primero a ver cuál es la fuerza total que ejerce un campo electromagnético sobre las cargas que estén contenidas en un volumen $\mathcal{V}$

$$F = \int_{\mathcal{V}} (E + v \times B)\rho d^3 r = \int_{\mathcal{V}} (\rho E + J \times B) d^3 r. \tag{1.44}$$

Evidentemente la densidad por unidad de volumen de fuerza es

$$\mathcal{F} = \rho E + J \times B, \tag{1.45}$$

de la misma manera que hicimos anteriormente, vamos a eliminar a ρ y a J utilizando las ecuaciones de Maxwell (1.10) y (1.13) y el resultado que obtenemos es

$$\mathcal{F} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot E) E + \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times B - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \times B. \tag{1.46}$$

Ahora, sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(E \times B) = \left(\frac{\partial E}{\partial t} \times B \right) + \left(E \times \frac{\partial B}{\partial t} \right) \tag{1.47}$$

y utlizando la ley de Faraday, ecuación (1.12)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E, \tag{1.48}$$

tenemos

$$\frac{\partial E}{\partial t} \times B = \frac{\partial}{\partial t}(E \times B) + E \times (\nabla \times E) \tag{1.49}$$

y poniendolo en la ecuación (1.46) tenemos

$$\mathcal{F} = \varepsilon_0[(\nabla \cdot E)E - E \times (\nabla \times E)] - \frac{1}{\mu_0}[B \times (\nabla \times B)] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(E \times B) \tag{1.50}$$

Utilizando una de las identidades entre operadores que dice que siendo G un campo vectorial cualquiera,

$$\nabla(G^2) = 2(G \cdot \nabla)G + 2G \times (\nabla \times G) \tag{1.51}$$

para todo G, tenemos que

$$E \times (\nabla \times E) = \frac{1}{2}\nabla(E^2) - (E \cdot \nabla)E \tag{1.52}$$

y un resultado similar tendríamos al desarrollar lo mismo para el campo magnético B. Finalmente la densidad de fuerza por unidad de volumen que obtendríamos sería

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \varepsilon_0[(\nabla \cdot E)E + (E \cdot \nabla)E] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot B)B + (B \cdot \nabla)B] \\ - \frac{1}{2}\nabla\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(E \times B). \end{aligned} \tag{1.53}$$

Esta ecuación puede ser simplificada significativamente definiendo el *Tensor de Stress de Maxwell*, el cual se lee

$$T_{ij} \equiv \varepsilon_0\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right). \tag{1.54}$$

Este tensor puede ser utilizado de la siguiente forma

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \overleftrightarrow{T})_j = \varepsilon_0\left[(\nabla \cdot E)E_j + (E \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2}\nabla_j(E^2)\right] \\ + \frac{1}{\mu_0}\left[(\nabla \cdot B)B_j + (B \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2}\nabla_j(B^2)\right] \end{aligned} \tag{1.55}$$

y con esta ayuda podemos escribir la densidad de fuerza del campo electromagnético como

$$\mathcal{F} = \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S}{\partial t} \tag{1.56}$$

donde S es el vector de Poynting que conocimos anteriormente.
Con la ecuación (1.56) y usando el teorema de la divergencia tenemos que la fuerza del campo electromagnético sería

$$F = \oint_{\mathcal{S}} \overleftrightarrow{T} \cdot d^2 r - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} S \cdot d^3 r. \tag{1.57}$$

Ahora, conociendo la segunda ley de Newton podemos afirmar que

$$F = \frac{\partial P_{em}}{\partial t}. \tag{1.58}$$

En la ecuación (1.57) vemos que el primer término es el momento por unidad de tiempo que fluye a través de la superficie $\mathcal{S}$ y el segundo término es el momento guardado dentro del campo electromagnético.

$$P_{em} = \varepsilon_0 \mu_0 \int_{\mathcal{V}} S \cdot d^3 r, \tag{1.59}$$

de lo cual podemos deducir que la *densidad de momento en el campo* es

$$\mathcal{P}_{em} = \varepsilon_0 \mu_0 S. \tag{1.60}$$

1.2.3. Momento angular de una onda electromagnética

En la primera década del siglo XX los pioneros de la investigación de la naturaleza corpuscular de la luz realizaron importantes trabajos acerca de la existencia del momento lineal de las ondas electromagnéticas. Poynting, en 1905, desarrolló un completo análisis acerca de la presión de radiación en términos de la densidad de momento lineal presente en una onda electromagnética. A. Einstein, en 1909 [1], demostró que la radiación de cuerpo negro es compatible con el movimiento de moléculas si se asume un momento lineal del fotón de $\hbar k$, donde $k = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda del fotón. Desde ese entonces y durante muchos años la física se dedicó a investigar la naturaleza de la cantidad de movimiento lineal de las ondas electromagnéticas. Sin embargo, Poynting, en 1909 [2], sugirió un modelo en donde se demostraría la transferencia de momento angular de $\hbar$ por cada fotón en una onda de luz polarizada circularmente. Varios experimentos, cada vez más sofisticados, se han planteado desde entonces para demostrar que la luz puede tener un momento angular orbital además del momento angular intrínseco que tiene el fotón por su naturaleza bosónica.

Un paquete de radiación electromagnética posee, como vimos en la sección anterior, una densidad de momento lineal dada por la expresión

$$\mathcal{P}_{em} = \varepsilon_0 \mu_0 S = \varepsilon_0 (E \times B). \tag{1.61}$$

Por ende, podríamos decir que una expresión adecuada para la *densidad de momento angular en el campo* sería

$$\mathcal{L}_{em} = r \times \mathcal{P}_{em} = \varepsilon_0 [r \times (E \times B)], \tag{1.62}$$

y obviamente el momento angular total del campo electromagnético sería la integral sobre todo el volumen correspondiente de la intensidad

$$J = \oint_{\mathcal{V}} \mathcal{L}_{em} = \oint_{\mathcal{V}} \varepsilon_0 [r \times (E \times B)] d^3. \tag{1.63}$$

Un experimento en el cual se ejerce un torque debido a la transferencia de momento angular de un rayo de luz polarizada circularmente fue desarrollado hace más de 60 años, antes de ese experimento la transferencia de momento entre luz y materia había sido únicamente lineal mas no angular. En este experimento desarrollado por Beth [5, 6], un "half-wave plate" es colgado de una delgada fibra de quartz. Un rayo de luz que ha sido polarizado circularmente por un "quarter-wave plate" fijo golpea el "half-wave plate" colgante el cual convierte su polarización a la derecha a polarización a la izquierda, transmitiéndole un momento angular de $2\hbar$ a la placa por cada fotón.

Sin embargo, la ecuación (1.63) es el momento angular total de la onda electromagnética. Para separar el momento angular de espin y el momento angular orbital utilizaremos el *Teorema de Helmholtz* para la descomposición de campos vectoriales. El método se puede aplicar a haces de luz polarizados linealmente o circularmente y en su forma clásica o cuántica.

El teorema de descomposición de Helmholtz [7] dice que cualquier campo vectorial en tres dimensiones puede ser expresado como la suma de dos términos

$$E(x,t) = -\nabla_x f(x,t) + \nabla_x \times F(x,t), \tag{1.64}$$

donde ∇_x es el operador gradiente con respecto a x y la función escalar f y vectorial F son funciones potenciales que se expresan como

$$f(x,t) = \varepsilon_0 \int \frac{\nabla_y \cdot E(y,t)}{|x-y|} d^3y \tag{1.65}$$

$$F(x,t) = \varepsilon_0 \int \frac{\nabla_y \times E(y,t)}{|x-y|} d^3y. \tag{1.66}$$

El primer término de la ecuación (1.64) se le llama la parte longitudinal y el segundo término es la parte transversal. Utilizando las leyes de Gauss y Faraday de las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones (1.10) y (1.12), las ecuaciones

(1.65) y (1.66) se pueden reescribir como

$$f(x,t) = \int \frac{\rho(y,t)}{|x-y|} d^3y \tag{1.67}$$

$$F(x,t) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{B(y,t)}{|x-y|} d^3y \tag{1.68}$$

donde $\rho(y,t)$ es la densidad volumétrica de carga y $B(y,t)$ es el campo magnético.

Como podemos ver en las ecuaciones (1.67) y (1.68), la descomposición de Helmholtz ha generado los potenciales de gauge de Coulomb de electromagnetismo

$$E(x,t) = -\nabla_x f - \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{1.69}$$

en donde

$$A(x,t) = \nabla_x \times \varepsilon_0 \int \frac{B(y,t)}{|x-y|} d^3y. \tag{1.70}$$

Cuando descomponemos el campo eléctrico tenemos dos partes. La primera, que corresponde a la ecuación (1.67), es la parte ligada (bound), ya que depende de la presencia de una carga, y la segunda, que corresponde al ecuación (1.68), es libre (free), porque no necesariamente necesita de la presencia de una carga.

El campo magnético B tambien puede ser descompuesto utilizando el teorema de Helmholtz

$$B(x,t) = -\nabla_x f(x,t) + \nabla_x \times F(x,t), \tag{1.71}$$

en donde tendríamos que

$$f(x,t) = \varepsilon_0 \int \frac{\nabla_y \cdot B(y,t)}{|x-y|} d^3y \tag{1.72}$$

$$F(x,t) = \varepsilon_0 \int \frac{\nabla_y \times B(y,t)}{|x-y|} d^3y. \tag{1.73}$$

El primer término de la descomposición del campo magnético se va a cero gracias a la ley de Gauss para magnetismo, ecuación (1.11), que dice que $\nabla \cdot B = 0$, y el segundo término lo reemplazamos utilizando la ley de Ampere-Maxwell, ecuación (1.13)

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right), \tag{1.74}$$

donde J es la densidad de corriente eléctrica. De esta manera, la descomposición del campo magnético nos quedaría

$$B(x,t) = \varepsilon_0 \mu_0 \left[\int \nabla_x \times \frac{J(y,t)}{|x-y|} d^3y + \varepsilon_0 \int \nabla_x \times \frac{\partial E(y,t)}{\partial t} \frac{1}{|x-y|} d^3y \right] \tag{1.75}$$

Ahora, ya descompuestos los campos eléctrico y magnético según el teorema de Helmholtz, nos dispondremos a hallar las expresiones para el momento angular. Considerando las descomposiciones realizadas, es decir, las ecuaciones (1.64),(1.65) y (1.66), las reemplazaremos en la ecuación (1.63).

Primero, haremos el cálculo para el campo libre (free), es decir, el término de la ecuación (1.64) que contiene el rotacional del vector potencial F, al reemplazarlo en la parte de la ecuación (1.63) de $E \times B$ y utilizando una identidad vectorial tenemos

$$(\nabla_x \times F) \times B = (B \cdot \nabla_x) F - \sum_{r=1}^{3} B^r \nabla_x F^r. \tag{1.76}$$

La contribución que hace el primer término al momento angular es

$$J_{fe} = \varepsilon_0 \int x \times (B \cdot \nabla_x) F d^3x. \tag{1.77}$$

Los subíndices de J_{fe} son f debido a que es el campo libre y e porque ya veremos que esta contribución será el momento angular de espin de la onda electromagnética. Ahora, la ecuación (1.77) escrita en componentes sería

$$J^i_{fe} = \varepsilon_0 \sum_{r,j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} \int x^j B^r \frac{\partial}{\partial x^r} F^k d^3x, \tag{1.78}$$

donde ε^{ijk} es el tensor de Levi-Civita de rango 3. Ahora hacemos una integración por partes con respecto a x^r

$$u = x^j B^r$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial x^r} F^k$$

$$uv - \int v du = x^j B^r F^k - \int F^k \frac{\partial}{\partial x^r}(x^j B^r) dx^r.$$

Suponiendo que el primer término se cancela por condiciones de frontera tenemos

$$uv - \int v du = -\int F^k \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^r} B^r + x^j \frac{\partial B^r}{\partial x^r} \right) dx^r.$$

Ahora, sabiendo que $\frac{\partial x^j}{\partial x^r} = \delta_{jr}$, donde δ_{jr} es el delta de Kronecker nuestro resultado final sería

$$J^i_{fe} = -\varepsilon_0 \sum_{r,j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} \int F^k \left(\delta_{jr} B^r + x^j \frac{\partial B^r}{\partial x^r} \right) d^3x. \tag{1.79}$$

El delta de Kronecker elimina el índice r y el segundo término del integrando es nulo porque $\frac{\partial B^r}{\partial x^r} = \nabla \cdot B = 0$ por la ley de Gauss para magnetismo, ecuación (1.11). Este resultado nos deja

$$J^i_{fe} = -\varepsilon_0 \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} \int B^j F^k d^3x, \tag{1.80}$$

que expresada vectorialmente es

$$J_{fe} = \varepsilon_0 \int F \times B d^3 x \tag{1.81}$$

y reemplazando F por lo que tenemos en la ecuación (1.68) el resultado final sería

$$J_{fe} = \varepsilon_0^2 \int \int \frac{B(x,t)}{|x-y|} \times \frac{\partial B(y,t)}{\partial t} d^3 x d^3 y, \tag{1.82}$$

la cual es la componente de espin del momento angular del campo electromagnético.

Para la contribución que hace el segundo término de la ecuación (1.76) tenemos

$$J_{fo} = -\varepsilon_0 \int x \times \sum_{r=1}^{3} B^r \nabla_x F^r d^3 x \tag{1.83}$$

En este caso el índice f indica, al igual que antes, que estamos tratando el campo libre y el índice o indica que esta es la contribución orbital del momento angular del campo electromagnético, ya que no hay manera de realizar alguna integración por partes que elimine el producto cruz de x.

Para el gradiente debemos tener en cuenta que

$$\nabla_x \frac{1}{|x-y|} = -\nabla_y \frac{1}{|y-x|} = -\frac{\hat{y}}{|y-x|^2} = -\frac{y}{|x-y|^3}. \tag{1.84}$$

Reemplazando F por lo que tenemos en la ecuación (1.68) y realizando el gradiente tenemos

$$J_{fo} = \varepsilon_0^2 \int \left[B(x,t) \cdot \frac{\partial B(y,t)}{\partial t} \right] \frac{x \times y}{|x-y|^3} d^3 x d^3 y. \tag{1.85}$$

De esta manera tenemos que las ecuaciones (1.82) y (1.85) representan respectivamente el momento angular de espin y orbital del campo electromagnético.

Ahora calcularemos el momento angular del campo electromagnético ligado, es decir, el que necesita la existencia de una carga eléctrica para que pueda ser.

$$J_b = -\varepsilon_0 \int x \times [\nabla_x f \times B] d^3x \tag{1.86}$$

En esta ecuación utilizamos el índice b para denotar el campo ligado. Intercambiando x y y, teniendo en cuenta la relación

$$\nabla_x \frac{1}{|x-y|} = -\nabla_y \frac{1}{|y-x|} \tag{1.87}$$

y reemplazando f por la expresión obtenida en la ecuación (1.67), tenemos

$$J_b = -\varepsilon_0 \int \rho(x,t) \int y \times \left[\nabla_x \times \frac{B(y,t)}{|x-y|}\right] d^3y d^3x, \tag{1.88}$$

donde esta expresión representa la contribución del campo ligado al momento angular, el cual evidencia su carácter orbital.

Las ecuaciónes (1.85) y (1.88) muestran claramente la escencia orbital del momento angular de una onda electromagnética clásicamente. Este tópico es de gran interés para nosotros ya que es la principal motivación que tenemos para desarrollar este documento, debido a la importancia que tiene en el ámbito de la óptica cuántica por el gran campo de exploración científica que deseamos investigar.

Capítulo 2

Teoría paraxial de la luz

Se dice que un haz de luz es *paraxial* cuando la dirección en la que viaja el frente de onda está formando un pequeño ángulo θ con el eje óptico y generalmente se debe quedar cerca del eje durante su trayectoria. Esta cercanía del eje permite hacer ciertas aproximaciones para describir la trayectoria del haz de luz. Esta clase de aproximaciones son conocidas como la *aproximación paraxial*.

A primer orden, la aproximación paraxial tiene como requisitos que

$$sen\theta \approx \theta$$

$$tan\theta \approx \theta$$

$$cos\theta \approx 1$$

La aproximación paraxial se utiliza para trazar trayectorias de haces de luz a primer orden y para óptica Gaussiana.

2.1. Derivación de la ecuación de onda paraxial

Podemos pensar que la función de onda paraxial es la que une el concepto de un campo electromagnético propagándose en una dirección privilegiada con su función de onda correspondiente. De manera más analítica, la función de onda paraxial es la generalización de las ondas que pueden ser descritas utilizando la aproximación paraxial, es decir, la generalización de las soluciones a la ecuación homogenea de Helmholtz.
La ecuación homogenea de Helmholtz [8] para el vector potencial tiene la forma

$$\nabla^2 A(r,t) + k^2 A(r,t) = 0, \tag{2.1}$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2_{x,y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Si decimos que este vector potencial genera un campo electromagnético que se propaga en una sola dirección, la dirección z para este caso, este vector tiene la forma

$$A(r,t) = \psi(r,t)e^{-ikz}. \tag{2.2}$$

El gradiente que usaremos para este propósito es

$$\nabla = \nabla_{x,y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}, \tag{2.3}$$

en donde definimos

$$\nabla_{x,y} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y}.$$

Por ende, el gradiente del vector potencial sería

$$\nabla A(r,t) = \nabla_{x,y}(\psi(r,t))e^{-ikz} + \frac{\partial}{\partial z}(\psi(r,t))e^{-ikz}\hat{z} - ik\psi(r,t)e^{-ikz}\hat{z}. \tag{2.4}$$

El laplaciano de este vector potencial sería

$$\nabla^2(\psi(r,t)e^{-ikz}) = \nabla^2_{x,y}(\psi(r,t)e^{-ikz}) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left[\frac{\partial}{\partial z}(\psi(r,t))\hat{z} - ik\psi(r,t)\hat{z}\right]e^{-ikz}\right], \quad (2.5)$$

usando la regla de derivación de un producto

$$\nabla^2(\psi(r,t)e^{-ikz}) = \nabla^2_{x,y}(\psi(r,t)e^{-ikz}) + \left[\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial z^2} - ik\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial z} - ik\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial z} - k^2\psi(r,t)\right]e^{-ikz}, \quad (2.6)$$

entonces la ecuación homogenea de Helmholtz sin aproximación sería

$$\nabla^2(\psi(r,t)e^{-ikz}) = \left[\nabla^2_{x,y}(\psi(r,t)e^{-ikz}) + \frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial z} - k^2\psi(r,t)\right]e^{-ikz}. \quad (2.7)$$

Usando la definición de la aproximación paraxial

$$2ik\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial z} \gg \frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial z^2}, \quad (2.8)$$

cancelando el exponente y pasando el último término a sumar a otro lado tenemos que

$$\nabla^2_{x,y}\psi(r,t) - 2ik\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) representa la función de onda paraxial.

2.2. Modos Hermite-Gauss

Ya encontramos la ecuación de onda paraxial, ahora nos preocuparemos por encontrar sus soluciones. La primera de ellas es la solución de modos Hermite-Gauss (HG), esta clase de soluciones brindan funciones de onda carentes de momento angular.

2.2.1. El haz gaussiano

Para este propósito, comenzaremos con la forma general de esta clase de soluciones, la cual será la semilla de las demás. Esta solución es llamada *haz gaussiano* (gaussian beam) y es de la forma:

$$\psi_G(\rho, z) = A_G e^{-iP(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}}, \tag{2.10}$$

en donde

$$\rho^2 = x^2 + y^2. \tag{2.11}$$

Introduciendo la función de onda del haz gaussiano a la ecuación paraxial (2.9) tenemos

$$e^{-iP(z)} \nabla^2_{x,y} \left[e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}} \right] - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{-iP(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}} \right] = 0 \tag{2.12}$$

$$e^{-iP(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}} \left[-\frac{2ik}{q(z)} - \frac{k^2\rho^2}{|q(z)|^2} - 2ik \left[-i\frac{\partial P(z)}{\partial z} + \frac{ik\rho^2}{2|q(z)|^2} \frac{\partial q(z)}{\partial z} \right] \right] = 0, \tag{2.13}$$

simplificando esta última expresión tenemos

$$2k \frac{\partial P(z)}{\partial z} + \frac{2ik}{q(z)} + \frac{k^2\rho^2}{|q(z)|^2} \left[1 - \frac{\partial q(z)}{\partial z} \right] = 0. \tag{2.14}$$

Para encontrar la solución a esta ecuación vemos que

$$\frac{k^2\rho^2}{|q(z)|^2} \left[1 - \frac{\partial q(z)}{\partial z} \right] = 0, \tag{2.15}$$

lo cual nos deja la relación

$$\frac{\partial q(z)}{\partial z} = 1 \tag{2.16}$$

y

$$2k \frac{\partial P(z)}{\partial z} + \frac{2ik}{q(z)} = 0, \tag{2.17}$$

de lo cual obtenemos que

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\frac{i}{q(z)}. \tag{2.18}$$

Resolviendo las ecuaciones (2.16) y (2.18) tenemos que

$$q(z) = z + q_0 \tag{2.19}$$

y

$$\frac{\partial P(z)}{\partial z} = -\frac{i}{z+q_0} = -i\frac{\partial ln(z+q_0)}{\partial z} \Longrightarrow P(z) = -iln(z+q_0). \tag{2.20}$$

Ahora, utlilizando la aproximacióm paraxial para este caso podemos decir que

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z+q_0} = \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw^2(z)}, \tag{2.21}$$

donde $R(z)$ es el radio de curvatura del frente de onda y $w(z)$ es el ancho del haz. Para tener un estándard de las constantes que estamos utilizando podemos asumir sin pérdida de generalidad que tenemos un frente de onda plano en el origen lo que significa que $R(0) = \infty$, lo que implica que

$$\frac{1}{R(0)} = 0 \tag{2.22}$$

y

$$-\frac{2i}{kw^2(0)} \equiv \frac{1}{q_0} \Longrightarrow q_0 = \frac{ikw^2(0)}{2} = iL, \tag{2.23}$$

donde

$$L = \frac{kw^2(0)}{2} \tag{2.24}$$

y es llamado el *parámetro de escalamiento crítico del haz Gaussiano* y también es conocido como la *longitud de Fresnel*, la *longitud de difracción* o el *parámetro confocal.*

De esta manera tenemos que

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iL}. \tag{2.25}$$

Multiplicando arriba y abajo por el complejo conjugado tenemos

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw^2(z)} = \frac{z - iL}{z^2 + L^2}. \tag{2.26}$$

Separando la parte real e imaginaria de esta ecuación podemos obtener las relaciones

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{z}{z^2 + L^2} \tag{2.27}$$

y

$$-\frac{2i}{kw^2(z)} = \frac{-iL}{z^2 + L^2} \tag{2.28}$$

y podemos sacar la siguiente generalización

$$R(z) = z\left(1 + \frac{L^2}{z^2}\right) \tag{2.29}$$

y

$$w^2(z) = w^2(0)\left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right). \tag{2.30}$$

Ahora, el resultado de la ecuación (2.20) se puede reescribir de la siguiente manera

$$P(z) = -iln(z + q_0) = -iln(z + iL), \tag{2.31}$$

aunque podemos darnos cuenta de

$$z + iL = z\left(1 + i\frac{L}{z}\right) = z\frac{1 + \frac{L^2}{z^2}}{1 - i\frac{L}{z}}. \tag{2.32}$$

Si hacemos el cambio de variable

$$tan(\theta) = \frac{L}{z} \tag{2.33}$$

la ecuación (2.32) se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
z + iL = z&\frac{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}}{1-i\frac{L}{z}} \\
&= z\frac{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}\cdot\sqrt{1+tan^2(\theta)}}{1-itan(\theta)} = z\frac{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}\cdot sec(\theta)}{1-itan(\theta)} \\
&= z\frac{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}}{cos(\theta)-isin(\theta)} = z\frac{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}}{e^{-i\theta}} \\
&= z\frac{\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}}{e^{-itan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right)}} = \frac{\sqrt{z^2+L^2}}{e^{-itan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right)}}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Entonces la ecuación (2.31) se podría escribir

$$
P(z) = -iln(z+q_0) = -iln(z+iL) = -i\left[\frac{1}{2}ln(z^2+L^2)+itan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right)\right] \tag{2.35}
$$

y de esta manera podemos escribir

$$
e^{-iP(z)} = \frac{e^{-itan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right)}}{\sqrt{z^2+L^2}} = \frac{e^{-itan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right)}}{z\sqrt{1+\frac{L^2}{z^2}}} \tag{2.36}
$$

y si reemplazamos las ecuaciones (2.26), (2.29), (2.30) y (2.36) dentro de la ecuación (2.10) tendríamos la expresión final para nuestro haz Gaussiano

$$
\psi_G(\rho,z) = A_G e^{-iP(z)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2q(z)}} = A_G\frac{w(0)}{w(z)} e^{-itan^{-1}\left(\frac{L}{z}\right)} e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}}. \tag{2.37}
$$

2.2.2. Haces Hermite-Gauss de mayor orden

Aunque la solución correspondiente al haz Gaussiano es de gran importancia debido a su simpleza, es apenas el primer paso para obtener el set de soluciones que pretendemos alcanzar. La solución del haz Gaussiano revela la raíz de la siguiente familia de soluciones, las cuales corresponden a haces de luz más complejos y de mayor orden, los cuales llamamos los modos Hermite-Gauss, o con su abreviatura, HG. Para ver la manera en que estos modos se propagan empezaremos suponiendo la siguiente solución

$$\psi_{HG}(\rho,z) = F(x,y,z)\psi_G(\rho,z) = f\left(\frac{x}{w}\right)g\left(\frac{y}{w}\right)e^{-i\phi(z)}\psi_G(\rho,z), \tag{2.38}$$

donde f y g son funciones independientes que aun no conocemos, $\phi(z)$ es una fase adicional a estas soluciones y $\psi_G(\rho,z)$ es la solución del haz Gaussiano que conocimos en la sección anterior.

Para encontrar la solución completa de esta función es necesario ver cómo se comporta, por ello, la reemplazaremos en la ecuación de onda paraxial.

$$\begin{aligned}\nabla\psi_{HG}(\rho,z) &= \nabla(F(x,y,z)\psi_G(\rho,z))\\ &= \nabla(F(x,y,z))\psi_G(\rho,z) + F(x,y,z)\nabla(\psi_G(\rho,z))\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi_{HG}(\rho,z) &= F(x,y,z)\nabla^2(\psi_G(\rho,z))\\ &\quad + 2[\nabla(F(x,y,z))\cdot\nabla(\psi_G(\rho,z))]\\ &\quad + \psi_G(\rho,z)\nabla^2(F(x,y,z))\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_{HG}(\rho,z)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z)\psi_G(\rho,z))\\ &= \frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z))\psi_G(\rho,z) + F(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}(\psi_G(\rho,z)).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Entonces, implementamos la ecuación (2.9) y nos queda

$$\begin{aligned}&F(x,y,z)\nabla^2(\psi_G(\rho,z)) + 2[\nabla(F(x,y,z))\cdot\nabla(\psi_G(\rho,z))]\\ &\quad + \psi_G(\rho,z)\nabla^2(F(x,y,z))\\ &\quad - 2ik\frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z))\psi_G(\rho,z) - 2ikF(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}(\psi_G(\rho,z))\end{aligned} \tag{2.42}$$

y como podemos ver, en la ecuación (2.42), el primer y el último término cumplen por sí mismos la ecuación de onda paraxial (2.9) y por lo tanto podemos deducir que el resto de términos deben cancelarse entre ellos. Con esta información y dividiendo la ecuación (2.42) por $F(x, y, z)$ tendríamos que los términos que deben cancelarse, el segundo, tercero y cuarto, quedarían

$$\frac{2[\nabla(F(x,y,z)) \cdot \nabla(\psi_G(\rho,z))]}{F(x,y,z)} + \frac{\psi_G(\rho,z)\nabla^2(F(x,y,z))}{F(x,y,z)} - 2ik\frac{\frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z))\psi_G(\rho,z)}{F(x,y,z)} = 0. \quad (2.43)$$

Para poder desmenuzar la ecuación (2.43) vemos que es necesario hallar cada pieza de esta ecuación. Comencemos con el gradiente en x y y de la función de onda del haz Gaussiano:

$$\nabla_{x,y}\psi_G = \psi_G\left(-\frac{ik}{R(z)} - \frac{2}{w^2(z)}\right)(x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (2.44)$$

El resto de piezas las podemos encontrar más fácilmente en el camino. Los términos a cancelar serían

$$-2\frac{f'g}{w}e^{-i\phi(z)}\psi_G\left(\frac{ik}{R(z)} + \frac{2}{w^2(z)}\right)x - 2\frac{fg'}{w}e^{-i\phi(z)}\psi_G\left(\frac{ik}{R(z)} + \frac{2}{w^2(z)}\right)y + \frac{f''g}{w^2}e^{-i\phi(z)\psi_G} + \frac{fg''}{w^2}e^{-i\phi(z)}\psi_G - 2kfge^{-i\phi(z)}\frac{\partial\phi(z)}{\partial z}\psi_G = 0. \quad (2.45)$$

Simplificando esta expresión dividiendo la ecuación por ψ_G, por fg y por $e^{-i\phi(z)}$ y multiplicando por $w^2(z)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f} - 2\frac{f'}{f}w\left(\frac{ik}{R(z)} + \frac{2}{w^2(z)}\right)x \\ + \frac{g''}{g} - 2\frac{g'}{g}w\left(\frac{ik}{R(z)} + \frac{2}{w^2(z)}\right)y \\ - 2kw^2(z)\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Teniendo en cuenta la relación de la ecuación (2.22) y simplificando un poco podemos escribir la ecuación (2.46) de esta manera

$$\frac{f''}{f} - 4\xi\frac{f'}{f} + \frac{g''}{g} - 4\zeta\frac{g'}{g} - 2kw^2(z)\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = 0, \quad (2.47)$$

en donde

$$\xi = \frac{x}{w} \quad (2.48)$$

y

$$\zeta = \frac{y}{w}. \quad (2.49)$$

Un polinomio de Hermite de orden n tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dr^2}H_n(r) - 2r\frac{d}{dr}H_n(r) + 2nH_n(r) = 0 \quad (2.50)$$

podemos hacer que la ecuación (2.47) se parezca independientemente, para f y para g a esta ecuación. Si dividimos la ecuación (2.50) en $H_n(r)$ tenemos

$$\frac{1}{H_n(r)}\left(\frac{d^2}{dr^2}H_n(r) - 2r\frac{d}{dr}H_n(r)\right) + 2n = 0, \quad (2.51)$$

y si hacemos los siguientes cambios de variable

$$r = \sqrt{2}\xi = \sqrt{2}\frac{x}{w} \quad (2.52)$$

y

$$\sigma = \sqrt{2}\zeta = \sqrt{2}\frac{y}{w}, \tag{2.53}$$

podemos escribir la ecuación (2.47) como

$$\frac{1}{f}\left(\frac{d^2 f}{dr^2} - 2r\frac{df}{dr}\right) + \frac{1}{g}\left(\frac{d^2 g}{d\sigma^2} - 2\sigma\frac{dg}{d\sigma}\right) - 2kw^2(z)\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = 0. \tag{2.54}$$

Aqui podemos ver que los dos primeros términos de la ecuación (2.54) son muy parecidos a lo que tenemos en la ecuación (2.51), así que podemos inferir que las funciones f y g son polinomios de Hermite de la siguiente manera

$$f\left(\frac{x}{w}\right) = H_n(r) = H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) \tag{2.55}$$

y

$$g\left(\frac{y}{w}\right) = H_m(\sigma) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right). \tag{2.56}$$

con la condición de que

$$2kw^2(z)\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = -2(n+m) \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial z} = -\frac{(n+m)}{2kw^2(z)} \tag{2.58}$$

$$\phi(z) = -(n+m)tan^{-1}\left(\frac{z}{L}\right). \tag{2.59}$$

Esto finalmente nos deja los modos Hermite-Gauss como solución general para la ecuación paraxial

$$\psi_{HG}(\rho, z) = A_{HG}\frac{w(0)}{w(z)}H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right)H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right)e^{i(n+m+1)tan^{-1}\left(\frac{z}{L}\right)}e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}}e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} \tag{2.60}$$

2.3. Modos Laguerre-Gauss

Como vimos anteriormente, el conjunto de soluciones de Hermite-Gauss es una solución general a la ecuación de onda paraxial. Este conjunto de soluciones genera infintas posibilidades de modos de luz que representan ejemplos de ondas afines a la aproximación paraxial. Sin embargo, este conjunto de soluciones carece de momento angular orbital, como ya habíamos mencionado. Para el propósito específico de este documento, generaremos combinaciones de este tipo de soluciones que serán portadoras de momento angular orbital. Este *nuevo* conjunto de soluciones es llamado *modos de Laguerre-Gauss*, o en su forma abreviada, modos LG.

L. Allen et. al., en 1992, [9] mencionó las relaciones existentes entre ciertas combinaciones de polinomios de Hermite y los polinomios de Laguerre. Esta identidad dejaba claro que debían entonces existir combinaciones de modos de Hermite-Gauss que se podrían escribir en términos de los polinomios de Laguerre. Sin embargo lo más importante de esta manera de escribir la solución de la ecuación de onda paraxial era que generaba una fase extra, la cual indicaba que esa combinación en especial tenía un momento angular definido que antes no existía. Debido a la existencia del momento angular en esta clase de soluciones, los modos de Laguerre-Gauss son de gran importancia para la temática tratada en este documento.

La relación mencionada por Allen en su artículo es

$$\sum_{k=0}^{n+m}(2i)^k P_k^{(n-k,m-k)}(0)H_{n+m-k}(x)H_k(y)$$
$$= 2^{n+m}\times\begin{cases}(-1)^m m!(x+iy)^{n-m}L_m^{n-m}(x^2+y^2) & \text{para } n\geq m\\ (-1)^n n!(x-iy)^{m-n}L_n^{m-n}(x^2+y^2) & \text{para } m\geq n\end{cases} \quad (2.61)$$

en donde

$$P_k^{(n-k,m-k)}(0)=\frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}[(1-t)^n(1+t)^m]\Big|_{t=0} \quad (2.62)$$

son los polinomios de Jacobi, $H_{n+m-k}(x)$ y $H_k(y)$ son los polinomios de Hermite y

$$L_m^n(r)=\frac{e^r r^{-n}}{m!}\frac{d^m}{dr^m}[e^{-r}r^{n+m}] \quad (2.63)$$

son los polinomios de Laguerre.

La función de onda que soluciona la ecuación de onda paraxial y que corresponde a los modos de Laguerre-Gauss es

$$\psi_{LG}(\rho,\phi,z)=\frac{A_{LG}}{\left(1+\frac{z^2}{L^2}\right)^{1/2}}\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)}\right)^l L_p^l\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)$$
$$\times\, e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}}e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}}e^{-il\phi}e^{i(2p+l+1)tan^{-1}\frac{z}{L}}. \quad (2.64)$$

Como podemos ver en la ecuación (2.64), la potencia de ρ y el orden del polinomio de Laguerre es el mismo y, viendo esto dentro de la ecuación (2.61), nos asegura que podemos representar esta clase de estados en términos de una serie de productos de polinomios de Hermite, Esto nos asegura que la ecuación (2.64) es solución de la ecuación de onda paraxial, pero además, que función de onda describe luz que posee momento angular, a diferencia de los modos HG.

Capítulo 3

Cuantización del campo paraxial.

En este capítulo pretendemos mostrar un método no perturbativo cuyo objetivo será cuantizar el campo electromagnético paraxial. El fin de estudiar este método es encontrar cuál sería el estado cuántico de un haz de luz cuya descripción clásica sería acorde con una solución de la ecuación de onda paraxial (2.9).

3.1. El Método

Este método fue desarrollado recientemente por Aiello y Woerdman en el 2005 [10] y su esquema fue básicamente el siguiente: Se comienza teniendo en cuenta el vector potencial cuantizado del campo electromagnético transversal, calculado para cierto tiempo tomado arbitrariamente (t=0, por conve-

niencia), y luego se selecciona de ese campo únicamente la parte que sería solución exacta de la ecuación de onda paraxial, para luego tomar su evolución temporal según la ecuación de onda de d'Alembert.
Comencemos considerando el operador de vector potencial

$$\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t) + \widehat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r},t). \tag{3.1}$$

Este operador es considerado dentro del gauge de Coulomb y puede ser escrito como superposición de ondas planas de la siguiente forma

$$\widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \int d^3\mathbf{k} \left(\frac{\hbar}{16\pi^3 \epsilon_0 c\, |\mathbf{k}|} \right)^{1/2} \times \sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \widehat{a}_\lambda(\mathbf{k}) exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - ic\,|\mathbf{k}|\, t), \tag{3.2}$$

y siendo $\widehat{\mathbf{A}}^{(-)}(\mathbf{r},t)$ el Hermítico conjugado de $\widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r},t)$. Podemos ver en la ecuación (3.2) que su parte exponencial es la que finalmente nos asegura que satisface la ecuación de onda de d'Alembert $\Box\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = 0$. Los dos vectores unitarios de polarización $\boldsymbol{\epsilon}^\lambda(\mathbf{k})$ $(\lambda = 1, 2)$ son transversales a la dirección de propagación de la onda $\boldsymbol{\epsilon}^\lambda(\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = 0$ y ortogonales entre ellos $\boldsymbol{\epsilon}^1(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\epsilon}^2(\mathbf{k}) = 0$. Además los operadores de creación y destrucción, obviamente, deben cumplir las reglas canónicas de conmutación $[\widehat{a}_\lambda(\mathbf{k}), \widehat{a}^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{k'})] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k'})$. En su trabajo, Aiello y Woerdman encontraron conveniente realizar cierta cuantización, la cual jugará un papel muy importante en el futuro. Ellos consideraron que como los rayos de luz paraxiales viajan muy cerca del eje óptico, el cual se ha escogido como eje z, es conveniente introducir una longitud de cuantización L finita paralela al eje z la cual discretiza el vector de número de onda en su componente z, de tal forma que

$$k_z \longrightarrow \xi_n = \frac{2\pi n}{L} \tag{3.3}$$

con $n = 0, 1, 2, ...$ De esta manera la integral con respecto a dk_z en la ecuación (3.2) se convierte en una sumatoria

$$\int dk_x dk_y dk_z \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right) \sum_n \int d^2\mathbf{q} \tag{3.4}$$

en donde $\mathbf{q} = (k_x, k_y)$ es la componente transversal al eje z del vector número de onda y $d^2\mathbf{q} \equiv dk_x dk_y$. Además es necesario reescalar los operadores de creación y destrucción definiendo $\widehat{a}_\lambda(\mathbf{k}) = \sqrt{L/2\pi}\widehat{a}_\lambda(\mathbf{q}, n)$ tal que $[\widehat{a}_\lambda(\mathbf{q}, n), \widehat{a}^\dagger_{\lambda'}(\mathbf{q'}, n')] = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta_{n,n'}\delta^{(2)}(\mathbf{q} - \mathbf{q'})$.

Un campo paraxial se expresa usualmente como el campo alrededor de un paquete de ondas que viajan exactamente paralelas al eje óptico y que poseen un vector número de onda $\mathbf{k}_0$ y una frecuencia $\omega_0 = c\,|\mathbf{k}_0|$. El vector número de onda obviamente se escogerá viajando en la dirección z sin pérdida de generalidad $\mathbf{k}_0 = k_0\hat{\mathbf{z}}$. Usando la identidad

$$\frac{\mathcal{L}}{2\pi}\int_0^{\frac{\mathcal{L}}{2\pi}} dk_0 \frac{exp(ik_0 z - i\omega_0 t)}{exp(ik_0 z - i\omega_0 t)} = 1 \tag{3.5}$$

donde $\mathcal{L}$ es alguna longitud arbitraria, podemos reescribir el operador vector potencial de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \times 1 = \\ \widehat{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathcal{L}}{2\pi}\int_0^{\frac{\mathcal{L}}{2\pi}} dk_0 \frac{exp(ik_0 z - i\omega_0 t)}{exp(ik_0 z - i\omega_0 t)} = \\ \frac{\mathcal{L}}{2\pi}\int_0^{\frac{\mathcal{L}}{2\pi}} dk_0 exp(ik_0 z - i\omega_0 t)\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}, t),\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde tendríamos que

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r},t) = \sum_n \int d^2\mathbf{q} \left(\frac{\hbar}{8\pi^2 \epsilon_0 c\, |\mathbf{k}|\, L} \right)^{1/2} \times \sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \widehat{a}_\lambda(\mathbf{q},n) exp(i(\mathbf{k} - k_0\hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{r} - i(c\,|\mathbf{k}| - \omega_0)t) \quad (3.7)$$

con

$$\mathbf{k} = \mathbf{q} + \xi_n \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.8)$$

3.2. El campo paraxial

Si retomamos lo visto en la ecuación (2.2), vemos que el campo $\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r},t)$ finalmente debe ser solución de la ecuación de onda paraxial (2.9).

Ahora encontraremos un campo inicial $\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}, t = 0)$ que satisfaga la ecuación paraxial y por simetría diremos que lo cumplirá para cualquier tiempo t

$$\frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})}{\partial y^2} + 2ik_0 \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (3.9)$$

Reemplazando la ecuación (3.7) dentro de la ecuación (3.9), vemos facilmente que

$$\frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})}{\partial x^2} = -k_x^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})}{\partial y^2} = -k_y^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})}{\partial z} = i(\xi_n - k_0) \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Con las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.12) la ecuación (3.9) quedaría

$$-k_x^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) - k_y^2 \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) + 2ik_0 i(\xi_n - k_0) \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) = 0$$

$$-k_x^2 - k_y^2 - 2k_0(\xi_n - k_0) = 0$$

$$-|\mathbf{q}|^2 - 2k_0\xi_n + 2k_0^2 = 0$$

y finalmente tenemos

$$\frac{\xi_n}{k_0} = 1 - \frac{|\mathbf{q}|^2}{2k_0^2}. \tag{3.13}$$

Esta relación nos asegura que, siempre que se esté cumpliendo, el operador vector potencial con el que trabajamos estará siempre cumpliendo tanto la ecuación de onda de d'Alembert, como la ecuación de onda paraxial.

Ahora definiremos el parámetro adimensional

$$\vartheta = \frac{q}{\sqrt{2k_0^2}} \tag{3.14}$$

en donde $q = |\mathbf{q}|$. Si definimos θ como el ángulo que se forma entre el vector número de onda y el eje óptico, en este caso el eje z, tendríamos que

$$\tan\theta = \frac{q}{\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{z}}} = \frac{q}{\xi_n} \longrightarrow \xi_n = \frac{q}{\tan\theta} = q\cot\theta. \tag{3.15}$$

Introduciendo las ecuaciones (3.14) y (3.15) dentro de la ecuación (3.13) tendríamos

$$\frac{q}{k_0}\cot\theta = 1 - \vartheta^2$$

$$\sqrt{2}\vartheta\cot\theta = 1 - \vartheta^2$$

$$\vartheta^2 + \sqrt{2}\vartheta\cot\theta - 1 = 0. \tag{3.16}$$

Resolviendo la ecuación (3.16) tendriamos

$$\sqrt{2}\vartheta = -\cot\theta + \sqrt{2 + \cot\theta}. \tag{3.17}$$

La ecuación (3.17) relaciona el ángulo θ con el parámetro de *paraxialidad* ϑ. Para expresar la ecuación (3.7) en términos de los parámetros que necesitamos, comenzaremos con el factor exponencial, el cual puede ser escrito

$$exp(i(\mathbf{k} - k_0\hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{r} - i(c\,|\mathbf{k}| - \omega_0)t) = exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + i(\xi_n - k_0)z - i(c\,|\mathbf{k}| - \omega_0)t)$$

con $\mathbf{x} = (x, y)$. Para nuestro propósito debemos tener en cuenta que

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \xi_n^2} = \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + \xi_n^2},$$

según la ecuación (3.14) tenemos que

$$q^2 = 2\vartheta^2 k_0^2, \tag{3.18}$$

según la ecuación (3.13) sabemos que

$$\xi_n^2 = k_0^2(1 - \vartheta^2)^2. \tag{3.19}$$

Usando las ecuaciones (3.18) y (3.19) tendriamos que

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= \sqrt{2\vartheta^2 k_0^2 + k_0^2(1 - \vartheta^2)^2} \\ &= k_0\sqrt{2\vartheta^2 + 1 - 2\vartheta^2 + \vartheta^4} \\ &= k_0\sqrt{1 + \vartheta^4}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

además usando la ecuación (3.13) tenemos que

$$\begin{aligned} \xi_n - k_0 &= k_0(1 - \vartheta^2) - k_0 \\ &= k_0 - k_0\vartheta^2 - k_0 \\ &= -k_0\vartheta^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Usando las ecuaciones (3.20) y (3.21) podríamos ver que

$$\begin{aligned} &exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}+i(\xi_n-k_0)z-i(c\,|\mathbf{k}|-\omega_0)t) \\ &\qquad = exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}+i(\xi_n-k_0)z-i(ck_0\sqrt{1+\vartheta^4}-\omega_0)t) \\ &\qquad = exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}+i(\xi_n-k_0)z-i\omega_0(\sqrt{1+\vartheta^4}-1)t) \\ &\qquad = exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}-ik_0\vartheta^2 z-i\omega_0 t(\sqrt{1+\vartheta^4}-1)), \end{aligned} \tag{3.22}$$

el cual sería el factor exponencial de la ecuación (3.7).

Ahora veremos cómo se afectan los vectores unitarios de polarización. Podemos ver que el vector número de onda está siempre en el plano $\mathbf{q}-\mathbf{z}$ si escribimos este vector en términos de $\mathbf{q}$ y k_0

$$\mathbf{k}=q\hat{\mathbf{q}}+k_0(1-\vartheta^2)\hat{\mathbf{z}}, \tag{3.23}$$

donde

$$\hat{\mathbf{q}}=\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}. \tag{3.24}$$

Entonces, como sabemos que los vectores unitarios de polarización deben ser perpendiculares a $\mathbf{k}$, entonces podemos tener la libertad de escoger uno de estos vectores que sea siempre perpendicular a este plano

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{q},\vartheta)=\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{q}}. \tag{3.25}$$

Ahora, sabemos que el otro vector de polarización debe ser ortogonal, tanto a $\mathbf{k}$, como a $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{q},\vartheta)$, así que este vector debe ser paralelo a $\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{q},\vartheta)\times\mathbf{k}$, solo que normalizado

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\mathbf{q},\vartheta)=\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{q},\vartheta)\times\hat{\mathbf{k}}=\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}(\mathbf{q},\vartheta)\times\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \tag{3.26}$$

Recordemos de la ecuación (3.20) que

$$|\mathbf{k}| = k_0\sqrt{1+\vartheta^4}.$$

Con esto y con las reglas de triple producto cruz tendríamos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\mathbf{q},\vartheta) &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{q}} \times \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \\
&= \frac{[q(\hat{\mathbf{q}}\cdot\hat{\mathbf{z}}) + k_0(1-\vartheta^2)(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}})]}{k_0\sqrt{1+\vartheta^4}}\hat{\mathbf{q}} - \frac{[q(\hat{\mathbf{q}}\cdot\hat{\mathbf{q}}) + k_0(1-\vartheta^2)(\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{q}})]}{k_0\sqrt{1+\vartheta^4}}\hat{\mathbf{z}} \\
&= \frac{(1-\vartheta^2)\hat{\mathbf{q}} - \frac{q}{k_0}\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\vartheta^4}} \\
&= \frac{(1-\vartheta^2)\hat{\mathbf{q}} - \sqrt{2}\vartheta\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1+\vartheta^4}}. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.25) y (3.27) representarian entonces los vectores unitarios de polarización. Si tenemos en cuenta las ecuaciones (3.3) y (3.13) en donde se define ξ_n podríamos darnos cuenta que

$$\begin{aligned}
\xi_n = \frac{2\pi}{L}n &= k_0(1-\vartheta^2) \\
\longrightarrow n &= \frac{k_0 L}{2\pi}(1-\vartheta^2). \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Como podemos ver en la ecuación (3.28), la parte izquierda es siempre un entero positivo pero la parte derecha no necesariamente, así que debemos definir una nueva función $n(\vartheta)$ que tendrá la misma forma de (3.28) pero tomará únicamente la parte entera de la parte derecha de (3.28).

$$n(\vartheta) \equiv \left[\frac{k_0 L}{2\pi}(1-\vartheta^2)\right]_{PE}, \qquad (3.29)$$

donde PE significa *Parte Entera*. Para incluir este elemento en la función del campo debemos introducir un delta de Kronecker que seleccione los $n's$

apropiados en la sumatoria, es decir

$$\sum_n \longrightarrow \sum_n \delta_{n,n(\vartheta)}$$

donde $\delta_{n,n(\vartheta)} = 1$ si $n = n(\vartheta)$ y $\delta_{n,n(\vartheta)} = 0$ de otra manera.

Finalmente, podemos escribir la ecuación (3.7) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) = \sum_n \int d^2\mathbf{q} \left(\frac{\hbar}{8\pi^2 \epsilon_0 \omega_0 \sqrt{1+\vartheta^4} L} \right)^{1/2} \\ \times \sum_{\lambda=1}^{2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{q},\vartheta) \hat{a}_\lambda(\mathbf{q},n) \delta_{n,n(\vartheta)} \\ \times exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - i\vartheta^2 k_0 z). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Tenemos entonces que la ecuación (3.30) representa el campo que envuelve nuestro rayo de luz paraxial.

Capítulo 4

Luz paraxial con momento angular

En el capítulo 2, vimos la deducción y solución de la ecuación de onda paraxial, y allí vimos algunas de las distintas soluciones que esta ecuación tiene: los modos Hermite-Gauss, para coordenadas cartesianas, y los modos Laguerre-Gauss, en coordenadas cilíndricas. Vimos qu estos últimos son de gran importancia para el eje central de este documento, ya que son una solución portadora de momento angular orbital.

4.1. Uso de los modos Laguerre-Gauss

Como sabemos, los modos LG son la solución a la ecuación de onda paraxial en coordenadas cilíndricas. Estos modos tienen la forma de la ecuación

(2.64) que reemplazando la constante de normalización se lee

$$\psi_{LG}(\rho,\phi,z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi\,(l+p)!}}\frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{L^2}\right)^{1/2}}\left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)}\right)^l L_p^l\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)$$
$$\times\, e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}}e^{-\frac{ik\rho^2}{2R(z)}}e^{-il\phi}e^{i(2p+l+1)tan^{-1}\frac{z}{L}}, \quad (4.1)$$

siendo $w(z)$ el ancho del modo para cualquier punto z, $R(z)$ el radio del frente de fase para cualquier punto en el eje z, $-(2p+l+1)tan^{-1}\frac{z}{L}$ es la fase de Gouy, y $L_p^l(x)$ son los polinomios de Laguerre cuya expresión puede ser

$$L_p^l(x) = \sum_{m=0}^{p}(-1)^m\frac{(l+p)!}{(p-m)!(l+m)!m!}x^m \quad (4.2)$$

o la ya antes vista en la ecuación (2.63).

Si consideramos la transformación de Fourier de los modos LG, su correspondiente transformada sería

$$\psi_{\mathcal{LG}}(r,\varphi) = \sqrt{\frac{w^2(0)p!}{2\pi(l+p)!}}\left(\frac{w(0)r}{\sqrt{2}}\right)^l L_p^l\left(\frac{w^2(0)r^2}{2}\right)\times e^{-\left(\frac{w^2(0)r^2}{4}\right)}e^{\left(il\varphi-i\frac{\pi}{2}(2p+l)\right)}, \quad (4.3)$$

donde r y φ son las correspondientes coordenadas cilíndricas para el espacio de Fourier.

Conociendo su condición de ortogonalidad

$$\int d^2\psi^*_{\mathcal{LG}l,p}(\mathbf{q})\psi_{\mathcal{LG}l',p'}(\mathbf{q}) = \delta_{ll'}\delta_{pp'}, \quad (4.4)$$

y utilizando su relación de completes

$$\sum_{l,p}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'}) = \delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{q'}) \quad (4.5)$$

podemos construir la siguiente identidad [11]

$$\begin{aligned}
e^{i\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}-i\vartheta^2 k_0 z\right]} &= \int d^2\mathbf{q'} e^{i\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}-i\vartheta^2 k_0 z\right]}\delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{q'}) \\
&= \int d^2\mathbf{q'} e^{i\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}-i\vartheta^2 k_0 z\right]}\left[\sum_{l,p}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'})\right] \\
&= \sum_{l,p}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\int d^2\mathbf{q'} e^{i\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}-i\vartheta^2 k_0 z\right]}\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'}) \\
&= \sum_{l,p}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi_{LG}(\rho,\phi,z), \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

con la cual relacionaremos el exponencial de la ecuación (3.30) con los modos Laguerre-Gauss.

Reemplazando el exponencial de la ecuación (3.30) por lo que tenemos en la ecuación (4.6) tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) &= \sum_n \int d^2\mathbf{q}\left(\frac{\hbar}{8\pi^2\epsilon_0\omega_0\sqrt{1+\vartheta^4}L}\right)^{1/2} \\
&\times \sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{q},\vartheta)\hat{a}_\lambda(\mathbf{q},n)\delta_{n,n(\vartheta)} \\
&\times \sum_{l,p}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi_{LG}(\rho,\phi,z). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Reorganizando un poco la ecuación (4.7) tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) &= \sum_n\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{l,p}\int d^2\mathbf{q}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\hat{a}_\lambda(\mathbf{q},n) \\
&\left(\frac{\hbar}{8\pi^2\epsilon_0\omega_0\sqrt{1+\vartheta^4}L}\right)^{1/2}\times\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{q},\vartheta)\delta_{n,n(\vartheta)}\times\psi_{LG}(\rho,\phi,z). \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Si tomamos el fragmento de la ecuación (4.8)

$$\int d^2\mathbf{q}\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\hat{a}_\lambda(\mathbf{q},n), \qquad (4.9)$$

y tenemos en cuenta la condición de ortogonalidad de los modos LG, ecuación (4.4), y las relaciones de conmutación de los operadores escalera

$$\left[\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{q},n),\hat{a}^{\dagger}_{\lambda'}(\mathbf{q'},n')\right]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{nn'}\delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{q'}) \tag{4.10}$$

podemos definir la ecuación (4.9) como un operador aniquilación con los modos LG de la manera

$$\hat{a}_{\lambda,l,p}(n)=\int d^2\mathbf{q}\psi^{*}_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{q},n), \tag{4.11}$$

ya que estos también cumplirían con las relaciones de conmutación

$$\left[\hat{a}_{\lambda,l,p}(n),\hat{a}^{\dagger}_{\lambda',l',p'}(n')\right]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ll'}\delta_{pp'}\delta_{nn'}. \tag{4.12}$$

Introduciendo este nuevo operador dentro de la ecuación (4.8) tendríamos

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r})=\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{n,l,p}\left(\frac{\hbar}{8\pi^2\epsilon_0\omega_0 L}\right)^{1/2}\\ \times\,\hat{a}_{\lambda,l,p}(n)\times\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}\times\psi_{LG}(\rho,\phi,z).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Este resultado es muy importante ya que vemos que logramos obtener una solución para la ecuación paraxial, que también resuelve las ecuaciones de Maxwell, y que debe ser portadora de momento angular ya que está escrita en términos de los modos Laguerre-Gauss. Sin embargo, para lograr esta solución también vemos que tuvimos que hacer un sacrificio, para poder escribirla de esta manera vemos que hay que hacer una aproximación en el parámetro adimensional ϑ, ya que vemos que solo funciona para $\vartheta << 1$ porque los vectores unitarios de polarización $\boldsymbol{\epsilon}$ ya no dependen de $\mathbf{q}$ ni n para que estén muy cerca al eje óptico y podamos escribir la solución a la ecuación paraxial como en la ecuación (4.13).

4.2. Operador de momento angular orbital

Para calcular el momento angular orbitral de la luz que describimos en este trabajo, utilizaremos el siguiente operador

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{\lambda,n,l,p} l\hat{a}^{\dagger}_{\lambda,l,p}(n)\hat{a}_{\lambda,l,p}(n). \tag{4.14}$$

Simplemente se trata del barrido sobre todas las opciones posibles del operador número construido con los ope- radores escalera que definimos con la ecuación (4.11).

Reemplazando la ecuación (4.11) dentro de la ecuación (4.14) tenemos

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{\lambda,n,l,p} l \int d^2\mathbf{q}\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\hat{a}^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{q},n) \int d^2\mathbf{q'}\psi^{*}_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'})\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{q'},n), \tag{4.15}$$

y reorganizando tenemos

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{\lambda,n} \int d^2\mathbf{q} \int d^2\mathbf{q'} \left[\sum_{l,p} l\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi^{*}_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'})\right] \hat{a}^{\dagger}_{\lambda}(\mathbf{q},n)\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{q'},n), \tag{4.16}$$

lo cual nos deja una posibilidad abierta para poder desarrollar un operador un poco menos general para calcular momento angular orbital de luz con características paraxiales.

Para calcular la sumatoria doble, sobre los índices l y p de la ecuación (4.16), debemos recordar la ecuación (4.3) y darnos cuenta que

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathbf{q}}}\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q}) = l\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q}), \tag{4.17}$$

por propiedades que ya hemos comentado antes, esto es un resultado que podríamos estar esperando.

De esta manera vemos que la sumatoria doble, sobre los índices l y p de la ecuación (4.16), se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\sum_{l,p} l\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'}) &= \sum_{l,p} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathbf{q}}}\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'}) \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathbf{q}}}\sum_{l,p}\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'}) \end{aligned} \tag{4.18}$$

y usando la ecuación (4.5) vemos que

$$\sum_{l,p} l\psi_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q})\psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q'}) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathbf{q}}}\delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{q'}), \tag{4.19}$$

lo cual resulta ser muy útil para simplificar la ecuación (4.16). Usando la ecuación (4.19) dentro de la ecuación (4.16) vemos que

$$\begin{aligned}\hat{L}_z &= \hbar\sum_{\lambda,n}\int d^2\mathbf{q}\int d^2\mathbf{q'}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathbf{q}}}\delta^{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{q'})\hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{q},n)\hat{a}_\lambda(\mathbf{q'},n) \\ &= \hbar\sum_{\lambda,n}\int d^2\mathbf{q}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi_{\mathbf{q}}}\hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{q},n)\hat{a}_\lambda(\mathbf{q},n)\end{aligned} \tag{4.20}$$

es el operador que finalmente calcula la componente z del momento angular orbital del rayo de luz paraxial.

4.3. Cálculo de momento angular orbital

En el artículo de Calvo, Picón y Bagan [11], se propuso, de la manera más general posible, una forma de los estados que se deberían utilizar para calcular el momento angular orbital con la clase de operadores que se pueden obtener con la ecuación (4.14). Según este artículo estos estados deberían ser de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda,n,l,p} C_{\lambda,l,p}(n)\hat{a}_{\lambda,l,p}(n)\,|0\rangle\,, \tag{4.21}$$

donde $|0\rangle$ es el estado vacío, y los coeficientes complejos $C_{\lambda,l,p}(n)$ deben satisfacer la condición de normalización

$$\sum_{\lambda,n,l,p} \left| C_{\lambda,l,p}(n)^2 \right| = 1, \tag{4.22}$$

y pueden ser interpretados como las amplitudes de probabilidad de encontrar un fotón en cierto estado propio, con cierta polaridad λ, componente en el eje z del vector de onda correspondiente al índice n e índices l y p correspondientes a un modo LG con momento angular orbital en el eje z bien definido. Los operadores que se pueden obtener de la ecuación (4.14) calculan el momento angular orbital de todo un haz de luz, es decir, todas las polaridades posibles, junto con todos los modos posibles y para todos los fotones que se encuentran en el haz. En este trabajo realizaremos un cálculo para un solo fotón, descrito por un estado no tan general, si no mucho más específico, lo cual nos permitiría ver realmente el desempeño de la ecuación (4.20), ya que los demás parámetros dependen del desempeño experimental que se realice y no dejarían ver lo que pasa con cada fotón.

Para nuestro cálculo usaremos un solo fotón cuyo estado es el conocido estado de estructura vórtice. Estos estados son de la familia de los modos de luz LG y representan la radiación proveniente de un sistema de un átomo de tres niveles en donde tenemos dos modos de luz ortogonales. Estos estados son descritos por Agarwal, Puri y Singh en 1997 [12] de la siguiente forma

$$\psi_v(x, y) = A_l(x + iy)^l e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}, \tag{4.23}$$

o como se escribiría en coordenadas cilíndricas

$$\psi_v(q, \varphi) = A_l q^l e^{il\varphi} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.24}$$

en donde $q = |\mathbf{q}|$ y A_l es la constante de normalización que toma el valor

$$A_l = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{l!}\sigma^{l+1}}. \tag{4.25}$$

Estos estados también tienen una representación por kets, simplemente hay que tener en cuenta

$$xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \hat{a}^\dagger \left|0\right\rangle_x \tag{4.26}$$

y

$$ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \hat{b}^\dagger \left|0\right\rangle_y, \tag{4.27}$$

en donde $a^\dagger$ y $b^\dagger$ son los operadores escalera correspondientes a los modos de luz de las coordenadas x y y respectivamente, y

$$e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \left|0\right\rangle_x \left|0\right\rangle_y \tag{4.28}$$

es el estado vacío.

De esta manera y definiendo unos operadores de una base circular tales que

$$c^\dagger = a^\dagger - ib^\dagger \tag{4.29}$$

y

$$d^\dagger = a^\dagger + ib^\dagger \tag{4.30}$$

vemos que podemos escribir los estados de estructura vórtice correspondientes a las ecuaciones (4.23) y (4.24) como

$$\left|\psi\right\rangle_v = c^{\dagger l} \left|0\right\rangle_x \left|0\right\rangle_y \tag{4.31}$$

o

$$|\psi\rangle_v = d^{\dagger l} |0\rangle_x |0\rangle_y . \tag{4.32}$$

El uso de $c^\dagger$ o de $d^\dagger$ depende del signo de polarización, lo cual acabará determinando también el signo del momento angular orbital.

Poniendo este estado sobre la ecuación (4.20) adecuada solo para este fotón tendríamos

$$\hat{L}_z |\psi\rangle_v = \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}\right] |\psi\rangle_v . \tag{4.33}$$

Reemplazando por la ecuación (4.32) tenemos

$$\hat{L}_z |\psi\rangle_v = \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}\right] d^{\dagger l} |0\rangle_x |0\rangle_y . \tag{4.34}$$

La primera operación es un conteo de fotones, si decimos que este es el estado de un solo fotón, el valor propio obtenido sera 1, y por lo tanto nos queda

$$\hat{L}_z |\psi\rangle_v = \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} d^{\dagger l} |0\rangle_x |0\rangle_y . \tag{4.35}$$

Usando la ecuación (4.24) vemos que

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z |\psi\rangle_v &= \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} d^{\dagger l} |0\rangle_x |0\rangle_y \\
&= \hbar \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[A_l q^l e^{il\varphi} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}\right] \\
&= l\hbar \left[A_l q^l e^{il\varphi} e^{-\frac{q^2}{2\sigma^2}}\right]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Esto finalmente nos deja como resultado

$$\hat{L}_z |\psi\rangle_v = l\hbar |\psi\rangle_v , \tag{4.37}$$

que es lo que estabamos esperando. Este resultado nos muestra que el estado escogido es portador de momento angular orbital como ya se sabía, y también que el operador construido a partir de la ecuación (4.14) funciona.

Capítulo 5

Conclusiones

El estudio de la óptica cuántica es una de las más grandes herramientas dentro del campo de la computación cuántica. Este campo de estudio también ha tenido importantes aplicaciones en las áreas de la física de la información, materia condensada, criptología, entre otras. Una pieza relevante dentro del campo de la óptica cuántica es el estudio de la luz que posee momento angular orbital, es decir, son rayos que, aparte del momento angular que poseen sus fotones por su naturaleza bosónica, pueden tener una cantidad extra de momento angular debido al modo en que se produce esta clase de radiación. Entre esta clase de luz se encuentra la luz cuya propagación es descrita por la ecuación de onda paraxial. Esta clase de luz es muy importante ya que describe una gran cantidad de tipos de radiación que hoy en día utilizamos. En este trabajo, se pretendió realizar un estudio de las investigaciones realizadas por algunos autores con respecto a este tema.

Después de hacer una introducción teórica referente a electrodinámica clásica y teoría paraxial de la luz, el punto de partida de este trabajo fue el de encontrar un operador vector potencial apropiado. Primero, este vector potencial debía cumplir con la ecuación de onda de D'Alambert,

$$\Box\widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{5.1}$$

dentro del gauge de Coulomb, y segundo, debía cumplir la ecuación homogénea de Helmholtz dentro del límite paraxial, es decir, que este vector potencial se pudiese escribir de la forma

$$\hat{A}(r,t) = \hat{\psi}(r,t)e^{-ik_0 z} \tag{5.2}$$

y que este operador $\hat{\psi}(r,t)$ será solución a la ecuación paraxial

$$\nabla_{x,y}\hat{\psi}(r,t) - 2ik_0\frac{\partial}{\partial z}\hat{\psi}(r,t) = 0. \tag{5.3}$$

Además de esto, nos concentramos en realizar una cuantización de este campo, lo cual nos dejó finalmente la expresión

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) = \sum_n \int d^2\mathbf{q}\left(\frac{\hbar}{8\pi^2\epsilon_0\omega_0\sqrt{1+\vartheta^4}L}\right)^{1/2} \\ \times \sum_{\lambda=1}^{2}\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{q},\vartheta)\hat{a}_\lambda(\mathbf{q},n)\delta_{n,n(\vartheta)} \\ \times\, exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - i\vartheta^2 k_0 z),\end{aligned} \tag{5.4}$$

la cual representa el campo cuántico que es solución de las ecuaciones (5.1) y (5.3).

Luego de esto nos concentramos en encontrar una forma de escribir la ecuación (5.4) en términos de los modos de radiación LG, ya que estos nos asegurarían que nuestro campo es portador de momento angular orbital, lo que finalmente nos dejó

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{n,l,p} \left(\frac{\hbar}{8\pi^2 \epsilon_0 \omega_0 L} \right)^{1/2} \times \hat{a}_{\lambda,l,p}(n) \times \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)} \times \psi_{LG}(\rho, \phi, z) \tag{5.5}$$

con

$$\hat{a}_{\lambda,l,p}(n) = \int d^2\mathbf{q} \psi^*_{\mathcal{LG}}(\mathbf{q}) \hat{a}_\lambda(\mathbf{q}, n). \tag{5.6}$$

La expresión (5.5) es una representación de la ecuación (5.4) en términos de los modos LG y después de haber realizado una aproximación en el parámetro de paraxialidad $\vartheta << 1$.

Luego obtuvimos el operador momento angular usando las herramientas que utilizamos en el desarrollo de este documento, y el resultado final obtenido fue

$$\hat{L}_z = \hbar \sum_{\lambda,n} \int d^2\mathbf{q} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\mathbf{q}}} \hat{a}^\dagger_\lambda(\mathbf{q}, n) \hat{a}_\lambda(\mathbf{q}, n), \tag{5.7}$$

el cual es un operador que hace un conteo las partículas calculando su momento angular orbital, haciendo un barrido en todas las posibilidades longitudinales, transversales y de direcciones de polarización.

Bibliografía

[1] A. Einstein, Phys. Z. **10**, 185 (1909).

[2] J.H. Poynting, Proc. R. Soc. Lond. A **82**, 560 (1909).

[3] Hecht, E., *Óptica*, Addison Wesley, Madrid (2000).

[4] Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1999).

[5] R.A. Beth, Phys. Rev.**48**, 471 (1935).

[6] R.A. Beth, Phys. Rev.**50**, 115 (1936).

[7] A.M. Stewart, Journal of Modern Optics **52** 1145-1154 (2005).

[8] http://people.deas.harvard.edu/

[9] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman, Phys. Rev. A. **45**, 8185 (1992).

[10] A. Aiello, J.P. Woerdman, Phys. Rev. A **72**, 060101(R)(2005).

[11] G.F. Calvo, A. Picón, E. Bagan, Phys. Rev. A **73**, 013805 (2006).

[12] G.S. Agarwal, R.R. Puri, R.P. Singh, Phys. Rev. A. **56**, 4207 (1997).