

HIPÓTESIS DE CLAUSURA PARA SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS AFINES A LA ECUACIÓN DE NAVIER-STOKES EN FLUJO TURBULENTO

Autor: Giovanna Trujillo Badillo

Asesor: José Rafael Toro

Universidad de los Andes
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica
Bogotá, Junio de 2003

Índice

Introducción.....	1
Metodología	3
Objetivos	4
1. Sistema dinámico discreto afín a NS para flujo turbulento	5
1.1. Término difusivo L_{ij}	5
1.2. Término no lineal $B_{ijk}u_ju_k$	7
1.2.1. Propiedad de conservación de la energía del término no lineal.....	7
1.2.2. Interacción entre grados de libertad cercanos	8
1.3. Término externo f	9
1.4. Sistema dinámico discreto	9
2. Evolución de los momentos de probabilidad del SDD	11
2.1. Variables probabilísticas de un sistema dinámico	11
2.2. Forma general de la ecuación de evolución de los momentos de probabilidad.....	14
2.3. Energía turbulenta del SDD.....	16
3. Hipótesis de clausura	18
3.1. Equilibrio de los momentos de probabilidad	18
3.2. Modelo κ - ϵ para el SDD	21
3.3. Evaluación numérica de la dependencia del primer momento de probabilidad en función los terceros momentos turbulentos.....	25
3.3.1. Relación entre los primeros momentos de probabilidad y los segundos momentos turbulentos.	25
3.3.2. Relación entre segundos y terceros momentos turbulentos.	28
3.3.3. Relación entre el valor de las condiciones iniciales y el valor de los terceros momentos turbulentos.	32
3.3.4. Influencia del diferencial de tiempo en los momentos de probabilidad.	41
3.3.5. Influencia de la cantidad de condiciones iniciales en los momentos de probabilidad.....	46
3.3.6. Equilibrio de los momentos de probabilidad para SDD con más de cinco grados de libertad.....	47
Conclusiones.....	53
Bibliografía	56
ANEXO 1. Índice de ecuaciones	57
ANEXO 2. Índice de figuras.....	62
ANEXO 3. Índice de tablas.....	64
ANEXO 4. Programas de computador.....	65

Introducción

Resolver numéricamente la ecuación de Navier-Stokes (NS) para flujo turbulento, representa un costo computacional muy alto y esto, sumado a la alta sensibilidad que tiene la ecuación a condiciones iniciales y a la naturaleza aparentemente aleatoria del movimiento turbulento, lleva a que casi todas las soluciones que se han propuesto para resolver el problema hayan sido enfocadas a resolver variables estadísticas relacionadas con el flujo, como lo son el promedio y la varianza de la velocidad (primer momento de probabilidad y segundo momento centrado, respectivamente). Dentro de estas metodologías se encuentra el denominado Modelo κ - ε , método de solución que actualmente puede considerarse el más utilizado. También existen otros métodos tales como Longitud de Mezcla de Prandlt, Reynolds Stress Models, Large Eddy Simulation, Renormalización, entre otros.

Debido a que la ecuación de NS es no lineal, cuando se estudian sus variables estadísticas, se descubre que la evolución del primer momento no sólo depende de el mismo, sino que también depende del segundo momento, que el segundo momento depende del tercero, el tercero del cuarto y, en general, el momento de orden n depende del momento de orden $n+1$. Este es el denominado problema de clausura.

Los métodos mencionados en el primer párrafo resuelven el problema de clausura haciendo truncaciones sobre los segundos o terceros momentos (desarrollar y solucionar ecuaciones de evolución para momentos de orden más alto representan un costo computacional inmanejable para los equipos comercialmente disponibles). Dado que no se tiene la ecuación exacta de evolución del momento truncado, sobre ésta se hace una suposición. Estas suposiciones se denominan *hipótesis de clausura*. Con la aplicación de estas hipótesis se puede, entonces, resolver la ecuación de NS para variables estadísticas asociadas a flujo turbulento. Es claro que se está despreciando el efecto de los momento de orden mayor que el truncado y, por lo tanto, no se sabe cual es su efecto sobre la solución de los campos de velocidad y presión.

Una manera de saber cuales son las consecuencias de ignorar los momentos de orden alto de un sistema, sin sufrir la limitación computacional arriba mencionada, es trabajar con un sistema dinámico discreto (SDD), que sea afín a la ecuación de NS para flujo turbulento. Estos tipos de sistemas dinámicos son denominados "shell model" ^{[1][2]}.

Para un SDD, se puede obtener la solución exacta de la variable involucrada. Si a esta variable se le estudian sus momentos de probabilidad de orden 1 hasta n , nuevamente aparecerá el problema de clausura. Sin embargo, las soluciones obtenidas para la variable de este sistema, luego de aplicar hipótesis de clausura sobre los momentos de probabilidad, pueden ser comparadas con el resultado exacto de la variable del sistema discreto. Así, se podría tener un mejor entendimiento de cómo se afecta el resultado obtenido por el orden del momento sobre él que se aplican las hipótesis de clausura y cuales de estas hipótesis generan resultados más satisfactorios.

Metodología

El presente trabajo puede dividirse en tres partes. Durante la primera parte, se presentará el sistema dinámico discreto a utilizar y se darán las razones por las cuales este sistema se considera afín a NS para flujo turbulento.

En la segunda parte se hallarán las ecuaciones exactas para la evolución de todos los momentos de probabilidad asociados al SDD.

Y, finalmente, en la tercera parte del trabajo se tratarán de construir modelos de clausura que involucren momentos más altos que el segundo y se compararán con las evoluciones exactas tomadas de la solución del sistema determinístico y los promedios serán reemplazados por los promedios temporales. Todos los cálculos numéricos se realizarán utilizando el programa Matemática 4.0, en un equipo de 128Mb y procesador AMDK62 a 500MHz.

Objetivos

Para un sistema dinámico discreto (SDD), afín a la ecuación de Navier-Stokes, para flujo en régimen turbulento, los objetivos son:

- Establecer las ecuaciones de evolución de los momentos de probabilidad del SDD.
- Generar hipótesis de clausura para momentos de orden más altos que el segundo.
- Evaluar la efectividad de las hipótesis de clausura utilizadas.

1. Sistema dinámico discreto afín a NS para flujo turbulento

El SDD (ref. 6) debe conservar la estructura y la función de los términos presentes en NS. La ecuación de NS puede verse, en forma general, así:

$$(1.1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu L(v) + B(v, v) + \Lambda(p) + f$$

- $L(v) = \nabla^2 v$, un operador lineal en la velocidad v .
- $B(v, v) = [\nabla v]v$, un operador cuadrático (o bilineal) en v es decir:
 - $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$, $B(w, v_1 + v_2) = B(w, v_1) + B(w, v_2)$
- f , es un término independiente de velocidad o presión.
- $\Lambda(p) = -\nabla p / \rho$, el gradiente de la presión, es lineal en la presión.

Para que el SDD que se construya sea afín a NS, en las variables $\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\}$, deben retenerse los elementos fundamentales de la estructura de (1.1):

$$(1.2) \quad \frac{du_i}{dt} = \nu L_{ij} u_j + B_{ijk} u_j u_k + f_i, \quad \forall i, i=1, 2, \dots, n$$

Ahora bien, dentro de la estructura de la ecuación 1.2 caben sistemas que necesariamente no son afines a NS. Por lo tanto, los términos de esta ecuación deben cumplir ciertas condiciones de manera que sus funciones sean equivalentes a las de los términos de NS. Esto se explica en los siguientes numerales.

1.1. Término difusivo L_{ij}

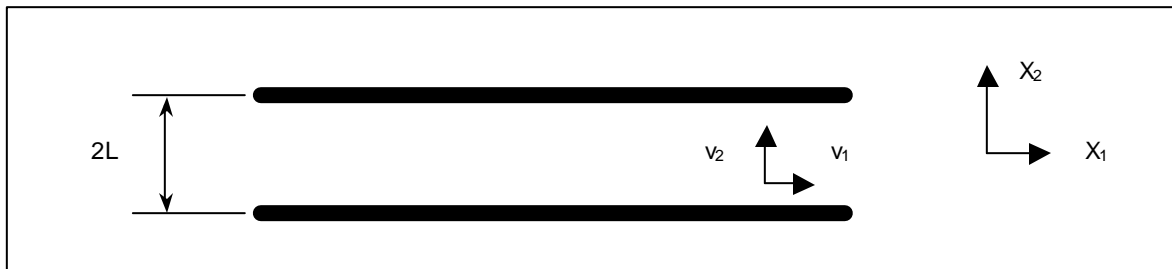
En NS $\nu L(v) = \nu \nabla^2 v$, es un término difusivo de la velocidad. Para que el SDD conserve esta propiedad, L_{ij} debe ser una matriz negativa definida. Considerando turbulencia isotrópica para el SDD, L_{ij} es, entonces, una matriz diagonal con valores negativos:

$$(1.1.1) \quad L_{ij} = -\lambda_i \delta_{ij} \quad (\text{sin suma sobre } i)$$

Cuando L_{ij} toma esta forma, la dinámica de (1.1), dictada únicamente por el término viscoso lineal, es exponencial decreciente:

$$(1.1.2) \quad \frac{du_i}{dt} = -\nu \lambda_i u_i \rightarrow u_i(t) = u_i(0) e^{-\nu \lambda_i t}, \quad \lambda_i > 0$$

Es decir que toda condición inicial conduce necesariamente al origen. En otras palabras este sistema dinámico tiene un punto de equilibrio atractivo en el origen. Este tipo de comportamiento para NS, dictado únicamente por el término viscoso se da cuando la ecuación la viscosidad es suficientemente grande y la geometría del flujo es simple como para que las fuerzas viscosas sean dominantes sobre las aceleraciones convectivas, el fluido decaerá al reposo de manera exponencial. Supóngase un fluido viscoso en un recipiente finito, el cual obliga a que las velocidades en las paredes sea cero. Por simplicidad, se tomará un problema infinito en la dirección x_1 y acotado entre dos placas en x_2 , tal que: $-L \leq x_2 \leq L$, $v_1(x_2=\pm L, t)=0$, $v_2=0$ y $v_1 = v_1(x_2)$.



Considerando condiciones iniciales simétricas alrededor de $x_2=0$, las soluciones también serán simétricas alrededor de $x_2=0$, $\forall t > 0$. Entonces, básicamente se estará resolviendo la ecuación diferencial:

$$(1.1.3) \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$$

Esta ecuación, equivalente a la ecuación del calor, tiene solución:

$$(1.1.4) \quad v_1 = e^{-\nu \lambda_i t} \cos(\sqrt{\lambda_i} x_2), \text{ para } \lambda_i = (2i-1) \frac{\pi}{2}$$

Aun cuando (1.1.4) representa la solución de un sistema continuo y (1.1.2) representa la solución de un sistema discreto, se ve la gran similitud entre las soluciones:

1. En ambos casos existe un decaimiento de la solución en la forma $e^{-\nu \lambda_i t}$
2. El término $\cos(\sqrt{\lambda_i} x_2)$ del sistema continuo es semejante a los vectores unitarios \mathbf{e}_i .

Entonces, la solución a la ecuación vectorial $du/dt = \nu [L]u$, con $[L]$ la matriz diagonal con elementos $-\lambda_i$, tiene soluciones independientes $e^{-\nu \lambda_i t} \mathbf{e}_i$, lo cual resulta análogo a $e^{-\nu \lambda_i t} \cos(\sqrt{\lambda_i} x_2)$, siendo $\cos(\sqrt{\lambda_i} x_2)$ una función análoga a los vectores unitarios \mathbf{e}_i . Y son

análogos, pues los e_i son ortogonales y constituyen una base para los estados de los sistemas dinámicos discretos. Los términos $\cos(\sqrt{\lambda_i} x_2)$ también son ortogonales en un producto interior de funciones y constituyen una base para soluciones de (1.1.4) con la condiciones de borde dadas. Estos argumentos sirven para justificar la equivalencia del termino viscoso en Navier-Stokes mediante un operador de la forma (1.1.1).

1.2. Término no lineal $B_{ijk}u_ju_k$

El término no lineal $-\nabla v$, tiene su análogo discreto en $B_{ijk}u_ju_k$, donde B_{ijk} es un arreglo de constantes que debe preservar dos propiedades en el modelo discreto: *conservación de la energía e interacción entre grados de libertad cercanos*.

1.2.1. Propiedad de conservación de la energía del término no lineal

El cambio, con el tiempo, de la energía cinética total, si $\partial v/\partial t = -\nabla v$ y el fluido es nulo en la fronteras (o, al menos, no las atraviesa), es:

$$(1.2.1.1) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = 0$$

La ecuación (1.2.1.1) puede demostrarse siguiendo el razonamiento a continuación. Una identidad importante de cálculo vectorial para flujo incompresible es :

$$(1.2.1.2) \quad [\nabla v]v = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \times v) \times v$$

Si se toma el producto interior de la velocidad con (1.2.1.2):

$$(1.2.1.3) \quad v \cdot [\nabla v]v = v \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + v \cdot ((\nabla \times v) \times v)$$

El segundo término a la derecha de (1.2.1.3) es, necesariamente, 0, ya que la velocidad es normal a un producto cruz que la involucre. Luego,

$$(1.2.1.4) \quad v \cdot [\nabla v]v = v \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Pero,

$$(1.2.1.5) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = v_i \frac{\partial v_k^2}{\partial x_i}$$

Utilizando (1.2.1.5) y si el flujo es incompresible entonces:

$$(1.2.1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot [\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial v_i v_k^2}{\partial x_i} = -\nabla \cdot (v^2 \mathbf{v})$$

Luego, usando el teorema de Gauss en (1.2.1.6), se obtiene:

$$(1.2.1.7) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla \cdot (v^2 \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} v^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Si la velocidad es nula en las fronteras, o por lo menos el flujo no las cruza se tiene:

$$(1.2.1.8) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = 0.$$

Es decir que, el término de aceleraciones convectivas conserva la energía cinética integrada sobre todo el fluido para las condiciones de frontera mencionadas, las cuales significan que a través de las mismas no hay flujo de energía cinética ni trabajo. Esto lleva a proponer que el término bilineal en (1.2) satisfaga:

$$(1.2.1.9) \quad B_{ijk} u_i u_j u_k = 0$$

Si la evolución es dictada únicamente por el término no lineal, $du_i/dt = B_{ijk} u_j u_k$, entonces, necesariamente éste conserva la energía total del sistema:

$$(1.2.1.10) \quad u_i \frac{du_i}{dt} = \frac{du_i^2/2}{dt} = B_{ijk} u_i u_j u_k = 0$$

1.2.2. Interacción entre grados de libertad cercanos

La segunda propiedad del término no lineal que debe conservarse en el modelo discreto es que éste sólo permite interacciones entre grados de libertad cercanos.

Los términos u_i del sistema discreto están mimetizando los distintos grados de libertad del sistema continuo en sus modos de Fourier, los cuales pueden verse como las velocidades para las distintas posiciones x dentro del flujo, es decir, que el sistema se extiende sobre un continuo de posiciones, por lo tanto se tiene un continuo de grados de libertad. Dentro de este continuo se usa, como criterio de proximidad de los grados de

libertad, la proximidad de las posiciones x que sirven para rotularlos, aunque en el SDD la proximidad se da en escalas de movimiento (ref 1)

En la ecuación de NS los cambios en la velocidad en $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, debidos al término no lineal, dependen del valor de $[\nabla v(x,t)]v(x,t)$. Este término está midiendo la velocidad relativa entre la velocidad en x y velocidades vecinas en la dirección de la velocidad misma. En otras palabras, involucra velocidades de puntos vecinos, es decir, la aceleración convectiva involucra la interacción entre grados de libertad cercanos. Esto se puede representar en el modelo discreto de la siguiente manera:

$$(1.2.2.1) \quad B_{ijk} = \beta_i R_{j-i, k-i}, \text{ donde: } R_{j-i, k-i} = 0, \text{ si } |j-i| > 1 \text{ o } |k-i| > 1$$

Esto significa que du_i/dt , sólo se ve afectado por grados de libertad cercanos a i , es decir, que están a no más de una unidad de "distancia"; por ejemplo, el grado de libertad u_3 sólo se ve afectado por los grados de libertad u_2, u_3, u_4 .

1.3. Término externo f

El término de la fuerza externa simula las condiciones de borde de NS, por medio de las cuales NS recibe energía. En el sistema de NS la condiciones de borde afectan directamente a los primeros grados de libertad, es decir en las grandes escalas. Debido a fenómenos viscosos, la energía es llevada de estas grandes escalas de movimiento hacia las más pequeñas en el fenómeno denominado cascada de energía. Simulando lo anterior, en el SDD f es un vector que inyectará energía el primer grado de libertad y esta fuerza, por fenómenos viscosos, afectará a los otros grados de libertad.

1.4. Sistema dinámico discreto

Cuando se trabaja con el sistema de NS y se quiere estudiar el fenómeno de la cascada de energía se utiliza la transformada de Fourier de NS. Así, el SDD finalmente queda formulado como:

$$(1.4.1) \quad \frac{du_i}{dt} = \lambda_i u_i + B_{ijk} u_j u_k + f_i$$

Donde: $\lambda_i = k_i^2$, $k_i = k_0 2^i$, $k_0 = 1.3$, $B_{ijk} = k_i R_{j-i, k-i}$, $R_{j-i, k-i} = 0$, si $|j-i| > 1$ o $|k-i| > 1$

Para un sistema de 10 grados de libertad se puede apreciar como, cambios en el valor de la viscosidad llevan al sistema de un régimen laminar a turbulento (se muestra un solo grado de libertad en cada caso puesto que todos tienen un comportamiento similar).

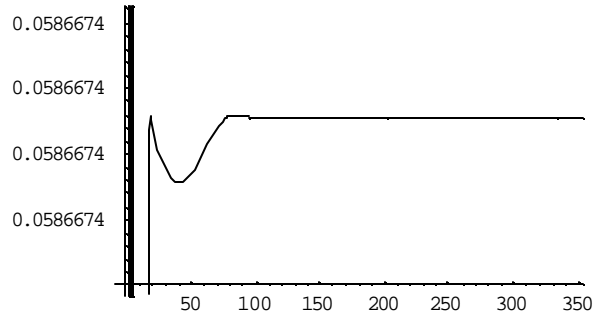


Figura 1. Comportamiento del grado de libertad 6 para $\nu=0.01$. Se puede observar que hay un comportamiento laminar del sistema.

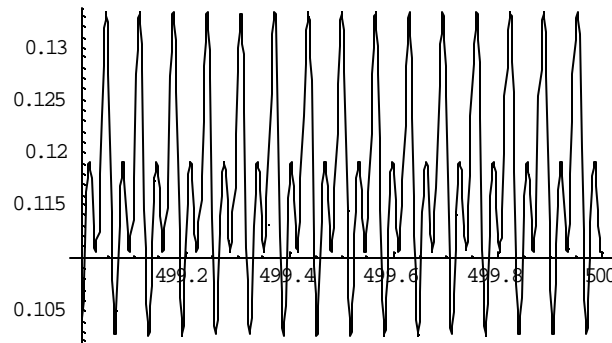


Figura 2. Comportamiento del grado de libertad 6 para $\nu=0.00004$. Se puede observar que hay un comportamiento periódico del sistema.

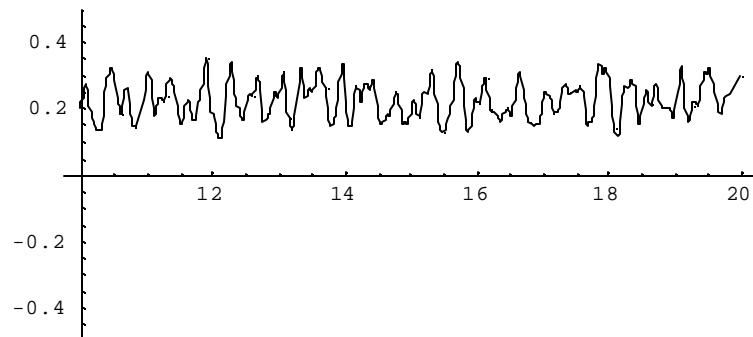


Figura 3. Comportamiento del grado de libertad 5 para $\nu=0.00001$. Se puede observar que para este valor de viscosidad el sistema presenta comportamiento turbulento.

2. Evolución de los momentos de probabilidad del SDD

2.1. Variables probabilísticas de un sistema dinámico

El desarrollo de las órbitas de los grados de libertad, de cualquier sistema dinámico, depende de las condiciones iniciales del sistema, excepto cuando existen puntos o ciclos límites atractivos a los cuales converge el sistema aún con condiciones iniciales diferentes, lo cual sucede en un flujo en régimen laminar. Esto puede verse en los siguientes gráficos, los cuales se obtuvieron con el SDD, para cinco grados de libertad:

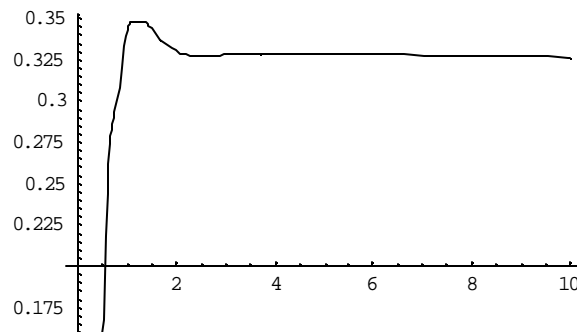


Figura 4. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.01$, con condición inicial $u_4=0.1$. Se puede observar que hay un comportamiento laminar del sistema.

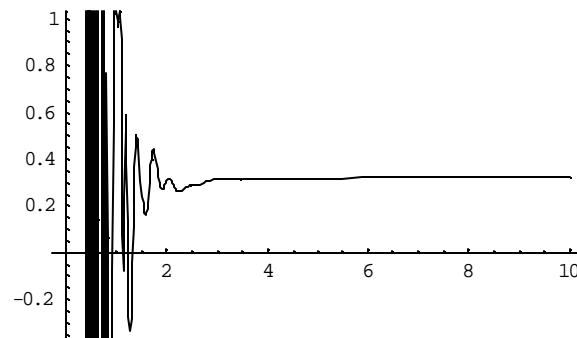


Figura 5. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.01$, con condición inicial $u_4=10$. Se puede observar que hay un comportamiento laminar del sistema.

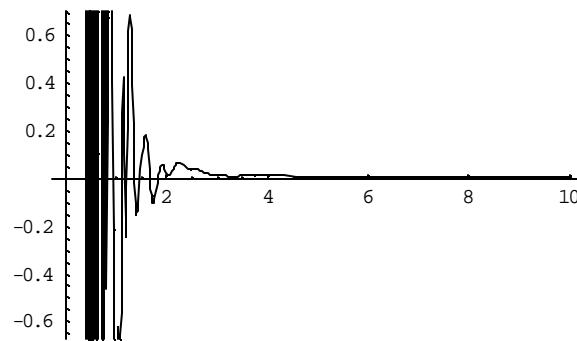


Figura 6. Diferencia entre las evoluciones de las gráficas 2.1.1 y 2.1.2 del grado de libertad 4. Se puede observar como, a pesar que una condición inicial es cien veces la otra, el sistema tiende al mismo punto atractivo.

Cuando el SDD es sometido a condiciones en las cuales no se tiende a un punto atractivo o a un ciclo límite, sino que se tiende a un atractor extraño, es decir, se está en un régimen turbulento, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producen significativos cambios en la evolución de los grados de libertad. Esto se puede apreciar en las siguientes gráficas:

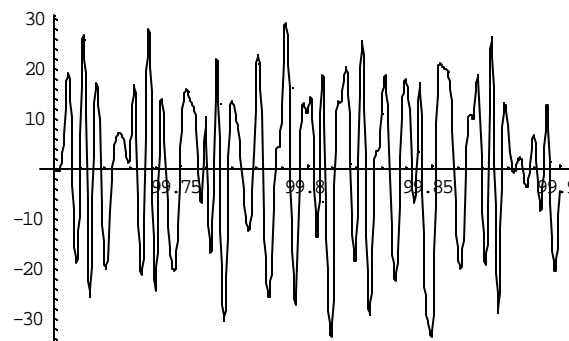


Figura 7. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.0001$, con condición inicial $u_4=0.5$. Se puede observar que hay un comportamiento turbulento del sistema.

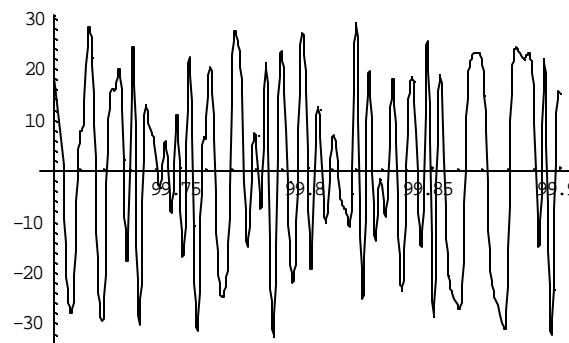


Figura 8. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.0001$, con condición inicial $u_4=0.6$. Se puede observar que hay un comportamiento turbulento del sistema.

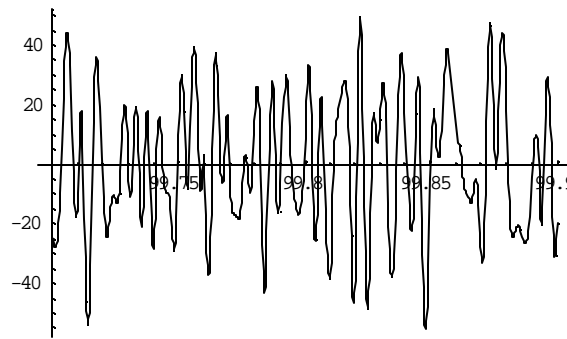


Figura 9. Diferencia entre las evoluciones de las gráficas 2.1.4 y 2.1.5 del grado de libertad 4. Se puede observar como, a pesar de la pequeña diferencia entre los valores de las condiciones iniciales, las órbitas del grado de libertad no llegan al mismo valor.

En estas tres últimas figuras se puede apreciar la alta sensibilidad del SDD a las condiciones iniciales del sistema cuando se encuentra en régimen turbulento. Por esta razón la evolución de una sola órbita proveniente de una única condición inicial pierde practicidad, pues pequeñas desviaciones de alrededor de esta condición generarían comportamientos totalmente distintos. Resulta más práctico hablar del comportamiento de un conjunto de órbitas provenientes de diferentes condiciones iniciales, las cuales, a pesar de su naturaleza absolutamente determinística, pueden trabajarse como un espacio muestral de probabilidad, si se considera que algunas condiciones iniciales se usan con mayor frecuencia que otras. Así, Los momentos de probabilidad se definen como:

$$(2.1.1) \quad \overline{u_i^n} = \int_{\Omega} u_i^n p(u) d\Omega$$

Donde $p(u)$ es la distribución de probabilidad de un conjunto de condiciones iniciales en el espacio muestral Ω .

La ecuación 2.1.1 conduce a que, para poder conocer los momentos de probabilidad se debe tener la evolución de la distribución de probabilidad de las condiciones iniciales. Esta distribución está dada por la siguiente ecuación en donde ∇_u es el gradiente calculado sobre los grados de libertad:

$$(2.1.2) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla_u \cdot p \frac{du}{dt}$$

Solucionando la anterior ecuación se conocería la distribución de probabilidad del sistema para todo tiempo y, por lo tanto, se conocería la evolución de las órbitas. Sin embargo, la discretización del espacio muestral del SDD lleva a que las exigencias

computacionales para resolver esta ecuación se vuelvan inmanejables, pues si se eligen n grados de libertad, la ecuación 2.1.2 es una ecuación diferencial parcial en \mathbb{R}^n . Por esta razón se opta por trabajar con las variables estadísticas asociadas no a todo el espacio muestral, sino a unas cuantas condiciones iniciales asumiendo una distribución de probabilidad constante para todas las condiciones utilizadas. De esta manera cada grado de libertad queda descrito como una suma de una variable promedio y una variable fluctuante:

$$(2.1.3) \quad u_i = \bar{u}_i + u_i'$$

2.2. Forma general de la ecuación de evolución de los momentos de probabilidad

Cuando se obtiene el promedio (primer momento de probabilidad, μ^1) del SDD formulado, se puede ver que éste depende del segundo momento:

$$(2.2.1) \quad \frac{d\bar{u}_i}{dt} = \nu \lambda_i \bar{u}_i + B_{ijk} \bar{u}_j \bar{u}_k + f_i$$

En la ecuación 2.2.1 se aprecian tres tipos de términos: uno dependiente del mismo momento de probabilidad del cual la ecuación describe su evolución (en este caso el primer momento de probabilidad); un segundo término que depende del momento de probabilidad de orden inmediatamente superior y, finalmente, un término independiente que depende de la fuerza. Teniendo en cuenta esto, se puede rescribir la ecuación 2.2.1 de la siguiente manera:

$$(2.2.2) \quad \frac{d\mu_i^1}{dt} = L_{1,i} \mu_i^1 + B_{12,i} \mu_{j,k}^2 + f_i$$

De otro lado, se puede construir la ecuación de evolución del segundo momento de probabilidad, μ^2 :

$$(2.2.3) \quad \frac{d}{dt} (\overline{u_m u_n}) = \overline{u_m} \frac{du_n}{dt} + \overline{u_n} \frac{du_m}{dt}$$

De la anterior ecuación se obtiene:

$$(2.2.4) \quad \frac{d}{dt} \overline{(u_m u_n)} = \nu(\lambda_m + \lambda_n) \overline{u_m u_n} + B_{mjk} \overline{u_j u_k u_n} + B_{njik} \overline{u_j u_k u_m} + \overline{u_m f_n} + \overline{u_n f_m}$$

En la anterior ecuación de nuevo se puede apreciar el mismo tipo de términos evidenciados en la ecuación 2.2.1: términos que dependen del momento al cual corresponde la ecuación (en este caso el segundo momento de probabilidad), términos que dependen de un momento de orden inmediatamente superior y términos que dependen de la fuerza y del momento inmediatamente anterior. La ecuación 2.2.4 puede reescribirse:

$$(2.2.5) \quad \frac{d}{dt} \mu^2 = L_2 \mu^2 + B_{23} \mu^3 + F_{21} \mu^1$$

Mediante operaciones matemáticas similares a las derivada de la ecuación 2.2.3 se puede obtener una ecuación para la evolución del tercer momento:

$$(2.2.6) \quad \frac{d}{dt} \overline{(u_m u_n u_p)} = \overline{u_m u_p} \frac{du_n}{dt} + \overline{u_n u_p} \frac{du_m}{dt} + \overline{u_n u_m} \frac{du_p}{dt}$$

$$(2.2.7) \quad \frac{d}{dt} \overline{(u_m u_n u_p)} = \nu(\lambda_m + \lambda_n + \lambda_p) \overline{u_m u_n u_p} + B_{mjk} \overline{u_j u_k u_n u_p} + B_{njik} \overline{u_j u_k u_m u_p} + B_{pjik} \overline{u_j u_k u_m u_n} + \overline{u_m u_p f_n} + \overline{u_n u_p f_m} + \overline{u_n u_m f_p}$$

$$(2.2.8) \quad \frac{d}{dt} \mu^3 = L_3 \mu^3 + B_{34} \mu^4 + F_{32} \mu^2$$

En general, se puede obtener la evolución de cualquier momento, evidenciándose que un momento de orden n depende del momento de orden $n+1$, del momento de orden n y del momento de orden $n-1$. Así, se obtiene una estructura de las ecuaciones que rigen la evolución de los momentos:

$$(2.2.9) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & L_2 & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & F_{32} & L_3 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde, en general:

L_n : cómo se afecta el momento de orden n por momentos del mismo orden.

$B_{n,n+1}$: cómo se afecta el grado de libertad n por grados de libertad de orden $n+1$.

$F_{n,n-1}$: cómo se afecta el grado de libertad n por grados de libertad $n-1$ (este término tiene su origen en el efecto de cascada de energía).

Las formas generales de los términos L , B y F son los siguientes:

$$(2.2.10) \quad L_{P_\varepsilon} = -\sum_{\varepsilon=1}^n \lambda_{P_\varepsilon} \mu_{P_n}$$

$$(2.2.11) \quad B_{P_\varepsilon, (P+1)_\varepsilon} = -\sum_{\varepsilon=1}^n (B_{P_\varepsilon} \mu_{P_n, i, k} (\mu_{P_\varepsilon})^{-1})$$

$$(2.2.12) \quad F_{P_\varepsilon, (P-1)_\varepsilon} = \sum_{\varepsilon=1}^n f_{P_\varepsilon} \mu_{P_n}$$

Donde: P son los grados de libertad del sistema ($P = 1, 2, \dots, i$); ε es el orden del momento que se está evaluando ($\varepsilon=1, 2, \dots, \infty$).

Claramente se puede observar que el SDD, evaluado en sus variables probabilísticas, presenta el problema de clausura, el cual debe solucionarse aplicando alguna hipótesis.

2.3. Energía turbulenta del SDD

Dado que en mecánica de fluidos la energía cinética del sistema es representada por el cuadrado de la velocidad, el análogo en el SDD se puede obtener elevando al cuadrado la ecuación 2.1.3 y utilizando las propiedades del promedio para obtener:

$$(2.3.1) \quad \overline{\frac{u_i^2}{2}} = \frac{\overline{u_i}^2}{2} + \frac{\overline{u_i'^2}}{2}$$

$$(2.3.2) \quad E_i = e_i + \kappa_i$$

Es decir, el promedio de la energía del SDD (E) es igual a la suma de la energía del promedio (e) más el promedio de la energía turbulenta (κ). Las ecuaciones de evolución de estas energías se pueden obtener utilizando un procedimiento similar al que se utilizó para hallar la ecuación de evolución de μ^2 . Para hallar el promedio de la energía (E), se sigue el siguiente procedimiento:

$$(2.3.3) \quad \frac{d}{dt} \overline{(u_i u_i)} = \overline{u_i \frac{du_i}{dt}} + \overline{u_i' \frac{du_i}{dt}} = 2 \overline{u_i \frac{du_i}{dt}}$$

$$(2.3.4) \quad \frac{d}{dt} \overline{(u_i u_i)} = \frac{d}{dt} \overline{(u_i^2)} = \overline{u_i \frac{du_i}{dt}}$$

Por lo tanto:

$$(2.3.5) \quad \frac{d}{dt} E_i = \overline{u_i \frac{du_i}{dt}}$$

$$(2.3.6) \quad \frac{d}{dt} E_i = \overline{u_i * (\nu \lambda_i u_i + B_{ijk} u_j u_k + f_i)}$$

$$(2.3.7) \quad \frac{d}{dt} E_i = \overline{u_i * (\nu \lambda_i u_i + B_{ijk} u_j u_k + f_i)}$$

$$(2.3.8) \quad \frac{d}{dt} E_i = 2\lambda_i E_i + B_{ijk} \overline{u_i u_j u_k} + \overline{f_i u_i}$$

La energía del promedio (e) se halla multiplicando la ecuación de evolución del promedio (ecuación 2.2.1) por el promedio. El procedimiento es el siguiente:

$$(2.3.9) \quad \frac{d\overline{u_i}}{dt} * \overline{u_i} = \frac{d}{dt} \frac{\overline{u_i^2}}{2} = \frac{d}{dt} e_i$$

Luego, la evolución de la energía del promedio está dada por:

$$(2.3.10) \quad \frac{d}{dt} e_i = 2\lambda_i e_i + B_{ijk} \overline{u_i u_j u_k} + \overline{f_i u_i}$$

La evolución de la energía turbulenta (κ), se halla mediante la utilización de la ecuación 2.3.2:

$$(2.3.11) \quad \frac{d}{dt} \kappa_i = 2\lambda_i \kappa_i + B_{ijk} \overline{u_i u_j u_k} - B_{ijk} \overline{u_i u_j u_k}$$

De la ecuación (2.3.11) se deduce que la energía turbulenta corresponde a los términos de la diagonal de la matriz que forman los valores del segundo momento turbulento. Esta energía turbulenta es una medida de cuan turbulento es el sistema. En un sistema bajo régimen laminar en donde no hay fluctuaciones la ecuación (2.3.2) queda reducida a $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i$. A medida que el sistema entra en régimen turbulento, la energía turbulenta toma importancia y puede llegar a ser tan significativa como la energía del promedio. Esto se evidencia en resultados numéricos presentados más adelante.

3. Hipótesis de clausura

A continuación se presentan tres métodos conducentes a establecer hipótesis de clausura sobre el SDD. Los tres métodos están basados en el equilibrio de los momentos de probabilidad.

En el primer método se pretende establecer una hipótesis sobre el segundo momento de probabilidad, al expresarlo en función de un momento de orden alto.

El segundo método es el equivalente al modelo κ - ϵ de NS, en el cual se plantea una hipótesis de Reynolds para clausurar el problema sobre el segundo momento de probabilidad.

El tercer método es una combinación de los dos primeros: establecer una relación del primer momento de probabilidad en función del tercer momento, vía los segundos momentos turbulentos.

3.1. Equilibrio de los momentos de probabilidad

Para poder conocer el equilibrio de los momentos de probabilidad definidos en la sección anterior se tendría que conocer la distribución de probabilidad de todas las condiciones iniciales del SDD, o el SDD tendría que ser ergódico. Dado que no se conoce la distribución de probabilidad ni hay evidencia de la ergodicidad del sistema, se hará una redefinición de los momentos de probabilidad.

Los momentos hasta ahora tratados, hallados promediando sobre un conjunto de condiciones iniciales, pueden considerarse como momentos de probabilidad en el espacio. Cada uno de estos momentos puede ser promediado sobre su tiempo de evolución, es decir un promedio temporal:

$$(3.1.1) \quad \overline{\mu^n} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu^n dt$$

Lo anterior se justifica en que el promedio sobre un conjunto de condiciones iniciales si puede ser hallado, considerando tantas condiciones iniciales como computacionalmente sea posible y asignando a cada una de ellas la misma probabilidad de ocurrencia. Este promedio sigue oscilando, pero más suavemente que las órbitas de cada grado de libertad. Esto ocasiona que este promedio tenga a su vez un promedio alrededor del cual oscila y

que es estable en el tiempo (el promedio del promedio). Este es el promedio temporal definido en la ecuación 3.1.1 y con el cual se seguirá trabajando (para simplificar la nomenclatura, este último promedio temporal se seguirá denominando como μ^n).

De esta manera, considerando el equilibrio del momento temporal sobre el promedio de condiciones iniciales, la ecuación 2.2.10 se reduce a:

$$(3.1.2) \quad \begin{bmatrix} L_1 & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & L_2 & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & F_{32} & L_3 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Utilizando la matriz 3.1.2 se pueden obtener las ecuaciones que describen los momentos de probabilidad. Dichas ecuaciones tienen la siguiente forma general:

$$(3.1.3) \quad \mu^n = fb_n (B_{n,n+1} \mu_{n+1} + (1)^n ? \sum_{m=n}^2 F_{m,m} fb_{m-1})$$

Donde: $fb_n = (I - F_{n,n-1} fb_{n-1} B_{n+1,n})^{-1}$, $fb_1 = f_1$.

La ecuación 3.1.3 se puede utilizar para hallar el μ^2 como función de un momento de probabilidad más alto elegido. Por ejemplo, eligiendo como máximo momento de probabilidad μ^5 , se obtiene:

$$(3.1.4) \quad \mu^2 = fb_2 F_{21} f_1 + fb_2 B_{23} fb_3 F_{32} fb_2 F_{21} f_1 + fb_2 B_{23} fb_3 B_{34} fb_4 F_{43} fb_3 F_{32} fb_2 F_{21} f_1 + fb_2 B_{23} fb_3 B_{34} fb_4 B_{45} \mu^5$$

Se puede apreciar que hay una estructura en los términos de la anterior ecuación que permite agruparlos denominándolos: $\phi_{n,n-1} = fb_n F_{n,n-1}$ y $\beta_{n,n+1} = fb_n B_{n,n+1}$. De esta manera, la ecuación 3.1.3 puede describirse como:

$$(3.1.5) \quad \mu^2 = \phi_{21} f_1 + \beta_{23} \phi_{32} \phi_{21} f_1 + \beta_{23} \beta_{34} \phi_{43} \phi_{32} \phi_{21} f_1 - \beta_{23} \beta_{34} \beta_{45} \mu^5$$

Las estructuras presentes en los términos de la anterior ecuación, se prestan para renombrarlos de la siguiente manera:

- Ciclo₁₂ = ϕ_{21}
- Ciclo₁₃₂ = $\beta_{23} \phi_{32} \phi_{21}$
- Ciclo₁₄₂ = $\beta_{23} \beta_{34} \phi_{43} \phi_{32} \phi_{21}$

- $\text{Ciclo}_{52} = \beta_{23}\beta_{34}\beta_{45}$

Gráficamente, la ecuación 3.1.5 puede verse así:

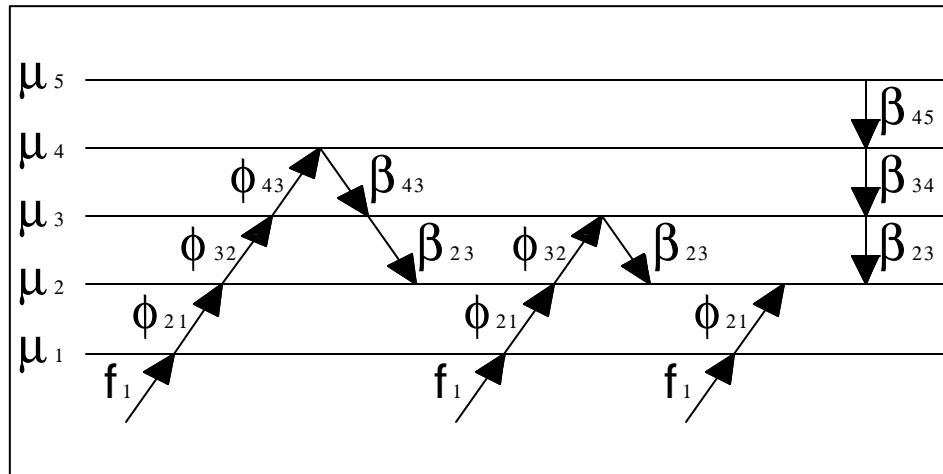


Figura 2.1.6. Representación gráfica de la dependencia del valor del segundo momento de probabilidad con respecto a los otros momentos de probabilidad hasta el máximo nivel elegido.

La anterior figura muestra como el segundo momento es afectado por los demás momentos y por si mismo, vía la fuerza de entrada, excepto para el momento de orden más alto utilizado. Esto es una muestra clara del problema de clausura.

Utilizando la ecuación 3.1.5, la hipótesis de clausura debería hacerse sobre el término que incluye el momento de orden cinco. Se esperaba que los otros términos fueran más relevantes comparados con el mencionado, de tal manera que el valor de la variable segundo momento se fuera acumulando con los términos intermedios y que el último término tuviera la menor importancia sobre su valor. Sin embargo, al evaluar numéricamente, se evidenció que *los términos intermedios (dependientes del tercer y cuarto momento), tienen magnitudes muy similares y signos contrarios que al sumarse se cancelan entre sí y, entonces, el valor de la variable segundo momento depende tanto de estos términos como del que involucra del quinto momento de probabilidad.* Esto dificulta realizar hipótesis de clausura ya que estas se harían justo sobre un término de tanta relevancia como cualquiera.

Lo anterior puede observarse en las siguientes matrices, las cuales muestran los resultados obtenidos para los ciclos en un sistema de tres grados de libertad, que

evolució desde cero hasta setecientos segundos, con condiciones iniciales para todos los grados de libertad de 0.5 y viscosidad 0.001.

In[55]:= **MatrixForm**[ciclo12]

Out[55]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2. \times 10^{-8} & 0.002 & 0. \\ -0.0005 & -4. \times 10^{-9} & 0. \\ 0. & 0. & -14.7059 \\ -0.0005 & -4. \times 10^{-9} & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -14.7059 \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

In[56]:= **MatrixForm**[ciclo132]

Out[56]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1.38122 & -0.00160221 & 0. \\ 0.000127072 & 3.40331 \times 10^{-9} & 0. \\ 0. & 0. & 14.7059 \\ 0.000127072 & 3.40331 \times 10^{-9} & 0. \\ -15.5387 & -0.0000248619 & 0. \\ 0. & 0. & 0.008 \\ 0. & 0. & 14.7059 \\ 0. & 0. & 0.008 \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

In[57]:= **MatrixForm**[ciclo142]

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.38122 & 0.00160221 & 0. \\ -0.000127072 & -1.27366 \times 10^{-8} & 0. \\ 0. & 0. & -1.264 \times 10^{-6} \\ -0.000127072 & -1.27366 \times 10^{-8} & 0. \\ 15.5387 & 0.00119153 & 0. \\ 0. & 0. & -6.87616 \times 10^{-10} \\ 0. & 0. & -1.264 \times 10^{-6} \\ 0. & 0. & -6.87616 \times 10^{-10} \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}$$

In[58]:= **MatrixForm**[ciclo152]

Out[58]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -5.67714 \times 10^{-6} & -0.00145454 & 0. \\ 4.82875 \times 10^{-10} & 3.11515 \times 10^{-8} & 0. \\ 0. & 0. & -4.51612 \times 10^{-6} \\ 4.91477 \times 10^{-10} & 3.11515 \times 10^{-8} & 0. \\ -0.0000559953 & -0.0035303 & 0. \\ 0. & 0. & -2.45336 \times 10^{-9} \\ 0. & 0. & -4.51612 \times 10^{-6} \\ 0. & 0. & -2.45336 \times 10^{-9} \\ 1.01068 \times 10^{-20} & -1.72833 \times 10^{-17} & 0. \end{pmatrix}$$

El comportamiento mostrado en las anteriores matrices es similar para el SDD con diferentes grados de libertad u otras condiciones iniciales en las cuales el segundo momento se expresa en función momento de orden más alto elegido: términos importantes que se cancelan en la suma que arroja al segundo momento.

3.2. Modelo κ - ϵ para el SDD

Uno de los métodos de resolución más importantes para NS en flujo turbulento es el método κ - ϵ , por lo tanto resulta de interés especial saber como sería un método equivalente aplicado al SDD. Este modelo debe contener los mismos elementos que el modelo κ - ϵ de NS, es decir, ecuaciones de evolución para el primer momento (ecuación 2.2.1), para la energía turbulenta (ecuación 2.3.11), para la disipación de energía turbulenta y para los segundos momentos turbulentos de probabilidad. Sobre estos elementos se construyen hipótesis de clausura que incluyen la definición de la denominada

viscosidad turbulenta, la cual proporciona la relación entre los esfuerzos turbulentos y la matriz de deformación promedio.

La evolución del primer momento de probabilidad (ecuación 2.2.1) puede describirse:

$$(3.2.1) \quad \frac{d\bar{u}_i}{dt} = \nu \lambda_i \bar{u}_i + B_{ijk} \overline{u_j u_k} - B_{ijk} \overline{u'_j u'_k} + f_i$$

De esta manera, el primer momento de probabilidad depende de los segundos momentos turbulentos y son estos sobre los que se debe aplicar alguna hipótesis de clausura.

En un modelo κ - ε tradicional, los segundos momentos turbulentos, denominados esfuerzos de Reynolds, σ_T , (ref. 5), se modelan en la forma indicada en la siguiente ecuación, la hipótesis de Reynolds:

$$(3.2.2) \quad -\frac{\overline{u'_j u'_k}}{\rho} = \frac{\sigma_T}{\rho} = 2\nu_T \bar{D}$$

Donde:

- ν_T : viscosidad turbulenta.
- \bar{D} : matriz de deformación promedio

Para hallar la ecuación equivalente a la hipótesis de Reynolds para el SDD, se reescribe al SDD en variables espaciales. Utilizando estas variables, se aplica la hipótesis de Reynolds equivalente y esta hipótesis se transforma a variables discretas mediante una transformada de Fourier.

El SDD, reescrito en variables espaciales, es:

$$(3.2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Es decir que la variable promedio es:

$$(3.2.4) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

Donde, reemplazando la relación 2.1.3:

$$(3.2.5) \quad \overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \overline{(\bar{u} + u') \frac{\partial (\bar{u} + u')}{\partial x}}$$

Utilizando las propiedades del promedio, se obtiene que:

$$(3.2.6) \quad \overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$$

Entonces, la ecuación, 3.2.4 queda:

$$(3.2.7) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

La ecuación 3.2.7, en variables espaciales, es la equivalente de la ecuación 3.2.1, en variables discretas.

De otro lado, la variable $u(x,t)$, en términos de transformada de Fourier, es:

$$(3.2.8) \quad u(x,t) = \sum u_k e^{ikx}$$

$$(3.2.9) \quad u(x,t) = \sum (\bar{u}_k + u'_k) e^{ikx}$$

$$(3.2.10) \quad \overline{u(x,t)} + u'(x,t) = \sum (\bar{u}_k + u'_k) e^{ikx}$$

Es decir que la variación es:

$$(3.2.11) \quad u'(x,t) * u'(x,t) = \sum_m \sum_n u'_m u'_n e^{imx} e^{inx}$$

Reacomodando la anterior ecuación:

$$(3.2.12) \quad u'(x,t) * u'(x,t) = \sum_{n,m} u'_m u'_n e^{i(m+n)x}$$

$$(3.2.13) \quad u'(x,t) * u'(x,t) = \sum_{n,m} u'_m u'_n \sum_k \delta_{k,m+n} e^{ikx}$$

$$(3.2.14) \quad \overline{u'(x,t) * u'(x,t)} = \sum_k e^{ikx} \sum_{n,m} \delta_{k,m+n} \overline{u'_m u'_n}$$

Con la ecuación 3.2.14 queda resuelto el término a la izquierda de la igualdad de la ecuación 3.2.2. Del otro lado, la matriz de deformación es:

$$(3.2.15) \quad \bar{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

La derivada parcial de la anterior ecuación, utilizando la ecuación 3.2.8, es:

$$(3.2.16) \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \sum_k i k \bar{u}_k e^{ikx}$$

Reemplazando las relaciones obtenidas en las ecuaciones 3.2.16 y 3.2.14, en la ecuación 3.2.2, se obtiene que:

$$(3.2.17) \quad \sum_k e^{ikx} \sum_{n,m} \delta_{k,m+n} \overline{u'_m u'_n} = 2\nu_T \sum_k \frac{1}{2} i k \bar{u}_k e^{ikx}$$

Es decir:

$$(3.2.18) \quad \sum_{n,m} \delta_{k,m+n} \overline{u'_m u'_n} = 2\nu_T \frac{1}{2} i k \bar{u}_k$$

Lo obtenido en la ecuación 3.2.18 muestra una relación entre los momentos de primer orden y los momentos turbulentos de segundo orden. Los segundos momentos turbulentos no pueden obtenerse cada uno de forma independiente, sino que la hipótesis de Reynolds del SDD genera una combinación lineal de ellos. Esto dificulta la resolución del primer momento de probabilidad puesto que lo que hubiera sido útil era expresar los segundos momentos turbulentos como combinación lineal de los primeros con el fin de utilizar esta expresión y reemplazarla en la ecuación 3.2.1. Sin embargo, teniendo en cuenta que es posible que haya segundos momentos turbulentos más relevantes que otros (por ejemplo los pertenecientes a la energía turbulenta), utilizando la relación obtenida en la ecuación 3.2.14, puede esperarse que la combinación lineal no involucre todos los términos de los esfuerzos de Reynolds, sino sólo unos cuantos, lo cual simplifica el problema. Esta aproximación al problema se trabaja en el siguiente ítem.

En resumen, la siguiente tabla contiene los elementos básicos que deberían tenerse en cuenta en el modelo κ - ϵ para el SDD:

$\frac{d\mu_i^1}{dt} = L_{1i}\mu_i^1 + B_{12i}\mu_j^1 \otimes \mu_k^1 + B_{12i}\mu_{j,k}^2 + f_i$	Evolución del primer momento de probabilidad en función de sí mismo y del segundo momento de probabilidad turbulento, el cual debe modelarse mediante alguna hipótesis.
---	---

$\frac{d\kappa_i}{dt} = 2L_{1i} \kappa_i + B_{12i} \mu_{j,k}^2 \mu_i^1 + B_{12i} \mu_{i,j,k}^3$	Evolución de la energía turbulenta κ , en la cual el término del tercer momento debe modelarse mediante una hipótesis.
$\varepsilon = 2L_{1i} \kappa_i$	Ecuación para la disipación de energía turbulenta ε . Obtenida de la ecuación de energía turbulenta, del término que involucra a la viscosidad y que, por lo tanto, es el termino de disipación.
$\mu_{j,k}^{2'} = f(\kappa, \varepsilon, \mu^1)$	El segundo momento turbulento de probabilidad se modela mediante una hipótesis que en teoría turbulenta es la denominada hipótesis de Reynolds (ecuación 3.2.14).

3.3. Evaluación numérica de la dependencia del primer momento de probabilidad en función los terceros momentos turbulentos

Los resultados obtenidos con la segunda hipótesis, llevan a pensar que, aunque de manera estrictamente simbólica no pueden obtenerse relaciones independientes de los segundos momentos turbulentos en función de los primeros momentos, en una evaluación numérica podrían evidenciarse relaciones más simples que puedan ser utilizadas para establecer hipótesis de clausura adecuadas.

Con el fin de reducir los tiempos de cálculo computacional, se redefine el SDD utilizando sólo el término bilineal el cual, por si mismo, genera turbulencia. De manera que el nuevo SDD, con B_{ijk} cumpliendo con las mismas propiedades descritas en el numeral 1.2, queda definido como:

$$(3.3.1) \quad \frac{du_i}{dt} = B_{ijk} u_j u_k$$

De esta manera, la evolución del primer momento de probabilidad esta dada por:

$$(3.3.2) \quad \frac{d\mu_i^1}{dt} = B_{ijk} \mu_j^1 * \mu_k^1 + B_{ijk} \mu_{j,k}^{2'}$$

3.3.1. Relación entre los primeros momentos de probabilidad y los segundos momentos turbulentos.

Una vez que se ha redefinido el SDD, se comprueba que la ecuación 3.3.2 llega, efectivamente, al equilibrio, por lo tanto:

$$(3.3.1.1) \quad B_{12} \mu_j^1 * \mu_k^1 = B_{12} \mu_{jk}^2$$

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para el SDD con cinco grados de libertad, evaluado entre diferentes intervalos de tiempo y con condiciones iniciales cercanas al atractor de evolución del SDD.

Tabla 1. Equilibrio del primer momento de probabilidad.

	$\mu^{2t} =$		
	$\begin{pmatrix} 0.28757 & 0.000595131 & 0.00226614 & -0.00133001 & -0.0617737 \\ 0.000595131 & 0.977564 & -0.00753756 & 0.00242335 & -0.00257754 \\ 0.00226614 & -0.00753756 & 0.97029 & 0.0101339 & 0.00272807 \\ -0.00133001 & 0.00242335 & 0.0101339 & 0.981368 & 0.0021999 \\ -0.0617737 & -0.00257754 & 0.00272807 & 0.0021999 & 0.28857 \end{pmatrix}$		
100<t<200	$\mu^1 =$	$B_{12} \mu^1 \otimes \mu^1 =$	$B_{12} \mu^{2t} =$
	$\begin{pmatrix} 0.850253 \\ -0.000893775 \\ 0.0090144 \\ -0.000394836 \\ 0.854613 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00252024 \\ 2.69258 \\ 0.0532842 \\ -10.866 \\ -0.0134248 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00238053 \\ -2.67058 \\ -0.222723 \\ 10.9886 \\ 0.0351984 \end{pmatrix}$
	$\mu^{2t} =$		
	$\begin{pmatrix} 0.293327 & -0.000896016 & 0.000403026 & 0.002812 & -0.0681857 \\ -0.000896016 & 0.978188 & 0.000735832 & -0.000194897 & 0.000102915 \\ 0.000403026 & 0.000735832 & 0.981002 & 0.000501896 & 0.00405782 \\ 0.002812 & -0.000194897 & 0.000501896 & 0.958065 & 0.00131294 \\ -0.0681857 & 0.000102915 & 0.00405782 & 0.00131294 & 0.292341 \end{pmatrix}$		
200<t<300	$\mu^1 =$	$B_{12} \mu^1 \otimes \mu^1 =$	$B_{12} \mu^{2t} =$
	$\begin{pmatrix} 0.857635 \\ -0.000621179 \\ 0.0104854 \\ -0.00309404 \\ 0.859756 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00236851 \\ 2.74778 \\ -0.0666586 \\ -11.0422 \\ -0.0796653 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00358407 \\ -2.75659 \\ 0.155901 \\ 11.0226 \\ 0.021007 \end{pmatrix}$

Los datos presentados en la anterior tabla presentan ciertos comportamientos que merecen especial atención:

1. Los promedios de los grados de libertad 2, 3 y 4 son pequeños comparados con los promedios de los grados de libertad 5:

$$(3.3.1.2) \quad \mu_2^1, \mu_3^1, \mu_4^1 \ll \mu_1^1, \mu_5^1$$

2. Los momentos turbulentos que están por fuera de la diagonal de la matriz de segundos momentos, son pequeños comparados con los elementos de la diagonal (energía turbulenta), es decir:

$$(3.3.1.3) \quad \mu_{j,k}^2 \approx 0, \forall j, k$$

Estos comportamientos simplifican el problema pues ahora, en la ecuación 3.3.3.1, hay que enfocarse en hallar relaciones entre dos primeros momentos (primer y quinto grado de libertad) y sólo cinco segundos momentos turbulentos (los pertenecientes a la diagonal). Es decir, explícitamente la ecuación 3.3.3.1 es:

$$\mathbf{B}_{12} \mu^1 \otimes \mu^1 = -\mathbf{B}_{12} \mu^2, \quad =$$

$$\begin{pmatrix} -4 \mu_1^1 \mu_2^1 \\ 4 \mu_1^1 - 8 \mu_2^1 \mu_3^1 - 4 \mu_3^1 \\ 8 \mu_2^1 + 4 \mu_2^1 \mu_3^1 - 16 \mu_3^1 \mu_4^1 - 8 \mu_4^1 \\ 16 \mu_3^1 + 8 \mu_3^1 \mu_4^1 - 16 \mu_5^1 \\ 16 \mu_4^1 \mu_5^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \mu_{1,2}^{2'} + 2 \mu_{2,1}^{2'} \\ -4 \mu_{1,1}^{2'} + 4 \mu_{2,3}^{2'} + 4 \mu_{3,2}^{2'} + 4 \mu_{3,3}^{2'} \\ -8 \mu_{2,2}^{2'} - 2 \mu_{2,3}^{2'} - 2 \mu_{3,2}^{2'} + 8 \mu_{3,4}^{2'} + 8 \mu_{4,3}^{2'} + 8 \mu_{4,4}^{2'} \\ -16 \mu_{3,3}^{2'} - 4 \mu_{3,4}^{2'} - 4 \mu_{4,3}^{2'} + 16 \mu_{5,5}^{2'} \\ -8 \mu_{4,5}^{2'} - 8 \mu_{5,4}^{2'} \end{pmatrix}$$

Estas matrices proveen las ecuaciones para los primeros momentos de probabilidad de cada uno de los cinco grados de libertad, en función de los segundos momentos. Así que, igualándolas y eliminando los términos que son zeros (ecuaciones 3.3.1.2 y 3.3.1.3), entonces se obtienen tres ecuaciones no triviales:

$$(3.3.1.4) \quad 4\mu_1^1 \mu_1^1 = 4\mu_{1,1}^{2'} + 4\mu_{3,3}^{2'}$$

$$(3.3.1.5) \quad 0 = 8\mu_{2,2}^{2'} + 8\mu_{4,4}^{2'}$$

$$(3.3.1.6) \quad 16\mu_5^1 \mu_5^1 = 16\mu_{3,3}^{2'} + 16\mu_{5,5}^{2'}$$

Además, de la ecuación 3.3.1.5 se deduce que:

$$(3.3.1.7) \quad \mu_{2,2}^{2'} = \mu_{4,4}^{2'}$$

Las ecuaciones 3.3.1.4 y 3.3.1.6 dan las relaciones a utilizar entre primeros y segundos momentos de probabilidad. Ahora bien, se necesita una relación entre segundos momentos turbulentos y terceros momentos turbulentos que lleve a conocer la dependencia entre el primer momento de probabilidad y el tercero. Esto con el fin de poder

aproximar los terceros momentos turbulentos mediante una hipótesis de clausura y así poder tener el valor del primer momento de probabilidad.

3.3.2. Relación entre segundos y terceros momentos turbulentos.

La evolución de los segundos momentos de probabilidad está dada por:

$$(3.3.2.1) \quad \frac{d\mu_{i,m}^2}{dt} = B_{ijk}\mu_{m,j,k}^3 + B_{mjk}\mu_{i,j,k}^3 + B_{ijk}(\mu_j^1\mu_{m,k}^2 + \mu_k^1\mu_{m,j}^2) + B_{mjk}(\mu_j^1\mu_{i,k}^2 + \mu_k^1\mu_{i,j}^2)$$

En la ecuación 3.3.2.1, la suma de los dos primeros términos, que involucran sólo terceros momento turbulentos, se equilibran con la suma de los dos últimos términos, que involucran productos entre primeros momentos y segundos momentos turbulentos:

$$(3.3.2.2) \quad B_{ijk}\mu_{m,j,k}^3 + B_{mjk}\mu_{i,j,k}^3 = B_{ijk}(\mu_j^1\mu_{m,k}^2 + \mu_k^1\mu_{m,j}^2) + B_{mjk}(\mu_j^1\mu_{i,k}^2 + \mu_k^1\mu_{i,j}^2)$$

En la siguiente tabla puede verse este equilibrio en el intervalo de 100 y 200 segundos (el comportamiento es similar en cualquier otro intervalo de tiempo).

Tabla 2. Equilibrio del segundo momento de probabilidad.

$\mu^1 \mu^2 =$

0.248205	0.000379752	0.0015894	-0.00165511	-0.0543897
0.000379752	0.82131	-0.00822372	0.0015891	-0.00195931
0.0015894	-0.00822372	0.817342	0.00941853	0.00139729
-0.00165511	0.0015891	0.00941853	0.824156	0.00142036
-0.0543897	-0.00195931	0.00139729	0.00142036	0.24349
0.000261492	-0.0111789	-0.00114836	0.0006097	-0.00029959
-0.0111789	-0.00118063	-0.000773584	0.000166506	-0.0101076
-0.00114836	-0.000773584	0.000660441	-0.000466798	0.00044759
0.0006097	0.000166506	-0.000466798	-0.0021513	-0.00022858
-0.00029959	-0.0101076	0.00044759	-0.00022858	-0.000835639
0.00277647	-0.00418929	-0.00979051	-0.000788727	-0.000547944
-0.00418929	0.00780349	0.000817418	0.000563077	0.000703765
-0.00979051	0.000817418	0.0109451	-0.00127317	-0.00756898
-0.000788727	0.000563077	-0.00127317	0.00605032	-0.00042246
-0.000547944	0.000703765	-0.00756898	-0.00042246	0.00345446
0.000186954	0.000521939	-0.00060432	-0.00736671	0.000722218
0.000521939	-0.000171925	-0.000822434	0.0016208	-0.000400281
-0.00060432	-0.000822434	0.00064765	-0.00147476	0.000683469
-0.00736671	0.0016208	-0.00147476	0.00028685	-0.00697735
0.000722218	-0.000400281	0.000683469	-0.00697735	-0.000124837
0.243448	0.0000999534	0.00152174	-0.00126216	-0.0545284
0.0000999534	0.823843	-0.0065434	0.00127522	-0.00280179
0.00152174	-0.0065434	0.8202	0.00792798	0.00200114
-0.00126216	0.00127522	0.00792798	0.829912	0.00222112
-0.0545284	-0.00280179	0.00200114	0.00222112	0.250876

$$\mu^3 =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0543523 \\ -0.000578984 \\ 0.00158007 \\ -0.000719171 \\ -0.0242992 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.000578984 \\ -0.11909 \\ 0.00340926 \\ -0.000735335 \\ 0.000335467 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.00158007 \\ 0.00340926 \\ -0.112835 \\ -0.00382445 \\ 0.000607623 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.000719171 \\ -0.000735335 \\ -0.00382445 \\ -0.128948 \\ -0.000417213 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.0242992 \\ 0.000335467 \\ 0.000607623 \\ -0.000417213 \\ -0.0229393 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.000578984 \\ -0.11909 \\ 0.00340926 \\ -0.000735335 \\ 0.000335467 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.11909 \\ 0.00382325 \\ -0.00587134 \\ -0.00165469 \\ -0.121404 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.00340926 \\ -0.00587134 \\ -0.00271068 \\ -0.004657 \\ 0.00229349 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.000735335 \\ -0.00165469 \\ -0.004657 \\ 0.0026304 \\ -0.00349726 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.000335467 \\ -0.121404 \\ 0.00229349 \\ -0.00349726 \\ -0.000980065 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.00158007 \\ 0.00340926 \\ -0.112835 \\ -0.00382445 \\ 0.000607623 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.00340926 \\ -0.00587134 \\ -0.00271068 \\ -0.004657 \\ 0.00229349 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.112835 \\ -0.00271068 \\ -0.0155038 \\ -0.00757408 \\ -0.120416 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.00382445 \\ -0.004657 \\ -0.00757408 \\ -0.00519204 \\ -0.00195326 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.000607623 \\ 0.00229349 \\ -0.120416 \\ -0.00195326 \\ 0.000278134 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.000719171 \\ -0.000735335 \\ -0.00382445 \\ -0.128948 \\ -0.000417213 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.000735335 \\ -0.00165469 \\ -0.004657 \\ 0.0026304 \\ -0.00349726 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.00382445 \\ -0.004657 \\ -0.00757408 \\ -0.00519204 \\ -0.00195326 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.128948 \\ 0.0026304 \\ -0.00519204 \\ 0.0110913 \\ -0.125827 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.000417213 \\ -0.00349726 \\ -0.00195326 \\ -0.125827 \\ -0.000559108 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.0242992 \\ 0.000335467 \\ 0.000607623 \\ -0.000417213 \\ -0.0229393 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.000335467 \\ -0.121404 \\ 0.00229349 \\ -0.00349726 \\ 0.000980065 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.000607623 \\ 0.00229349 \\ -0.120416 \\ -0.00195326 \\ 0.000278134 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.000417213 \\ -0.00349726 \\ -0.00195326 \\ -0.125827 \\ -0.000559108 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.0229393 \\ -0.000980065 \\ 0.000278134 \\ -0.000559108 \\ 0.0498223 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$B_{i,j,k} (\mu_j^1 \mu_{m,k}^{2'} + \mu_k^1 \mu_{m,j}^{2'}) + B_{m,j,k} (\mu_j^1 \mu_{i,k}^{2'} + \mu_k^1 \mu_{i,j}^{2'})$$

$$\begin{pmatrix} (-0.00512996) & (-1.13386) & (-0.0225684) & (1.41167) & (0.000396458) \\ (-1.13386) & (-0.119481) & (-0.0992217) & (0.109914) & (-0.369778) \\ (-0.0225684) & (-0.0992217) & (0.054277) & (0.206452) & (0.0881279) \\ (1.41167) & (0.109914) & (0.206452) & (-0.150425) & (4.89879) \\ (0.000396458) & (-0.369778) & (0.0881279) & (4.89879) & (0.067081) \end{pmatrix}$$

$$B_{i,j,k} \mu_{m,j,k}^3 + B_{m,j,k} \mu_{i,j,k}^3$$

$$\begin{pmatrix} (0.00463187) & (1.11783) & (0.140051) & (-1.46598) & (-0.00801728) \\ (1.11783) & (0.110995) & (0.15059) & (-0.000270182) & (0.310164) \\ (0.140051) & (0.15059) & (0.209816) & (-0.350627) & (0.0445652) \\ (-1.46598) & (-0.000270182) & (-0.350627) & (-0.307552) & (-4.75268) \\ (-0.00801728) & (0.310164) & (0.0445652) & (-4.75268) & (-0.0178915) \end{pmatrix}$$

De los datos presentados en la anterior tabla debe resaltarse lo siguiente:

1. Para las matrices cuya suma genera el equilibrio del segundo momento (es decir las dos últimas matrices mostradas en la tabla 2), los términos que son más altos en una matriz son más parecidos a su negativo en la otra matriz que los términos de valor bajo. Esto se debe a que los primeros evolucionan más lentamente y el diferencial de tiempo que se utilizó (0.1 seg) en la evaluación numérica del SDD, pudo registrar sus detalles de

evolución, mientras que los términos de bajo valor evolucionan más rápido y por lo tanto necesitan un diferencial de tiempo menor (0.01 seg).

2. Como clara consecuencia de lo definido en las ecuaciones 3.3.1.2 y 3.3.1.3, en la matriz $\mu^1\mu^{2'}$, se puede apreciar como los términos de valor alto son los dados por la combinación entre los primeros momentos de los grados de libertad 1 y 5 (μ_1^1, μ_5^1) y los segundos momentos turbulentos $\mu_{1,1}^{2'}, \mu_{2,2}^{2'}, \mu_{3,3}^{2'}, \mu_{4,4}^{2'}, \mu_{5,5}^{2'}$.

3. En la matriz de terceros momentos turbulentos $\mu^{3'}$, hay que notar el hecho de que hay tres escalas de valores muy definidas: los valores más altos son aquellos que están dados por términos con subíndices correspondientes a la combinación de grado de libertad de alto promedio con grado de libertad de energía turbulenta alta. Es decir: $\mu_{1,2,2}^{3'}, \mu_{1,3,3}^{3'}, \mu_{1,4,4}^{3'}, \mu_{5,2,2}^{3'}, \mu_{5,3,3}^{3'}, \mu_{5,4,4}^{3'}$. La escala intermedia de valores está dada por términos con subíndices correspondientes a la combinación de grado de libertad de alto promedio con grado de libertad de energía turbulenta media ($\mu_{1,5,5}^{3'}, \mu_{5,1,1}^{3'}$) o por la diagonal de la matriz $\mu^{3'}$ ($\mu_{1,1,1}^{3'}, \mu_{2,2,2}^{3'}, \mu_{3,3,3}^{3'}, \mu_{4,4,4}^{3'}, \mu_{5,5,5}^{3'}$). Los términos restantes hacen parte de los valores bajos y están dados por términos con subíndices correspondientes a combinaciones entre grados de libertad con promedio bajo y segundos momentos turbulentos bajos.

Tal como sucedió para el equilibrio del primer momento de probabilidad, estos comportamientos descritos simplifican la dependencia de los segundos momentos en función de los terceros y primeros momentos de probabilidad. De esta manera, las relaciones dadas por la ecuación 3.3.3.2 pueden simplificarse, obteniendo:

$$(3.3.2.3) \quad \mu_{11}^{2'} = \frac{1}{2\mu_1^1} (\mu_{133}^{3'} + \mu_{122}^{3'} - \mu_{111}^{3'}) + \frac{1}{2} \mu_{22}^{2'}$$

$$(3.3.2.4) \quad \mu_{22}^{2'} = \frac{1}{2\mu_3^1} (\mu_{211}^{3'} - 2\mu_{322}^{3'} - \mu_{233}^{3'})$$

$$(3.3.2.5) \quad \mu_{33}^{2'} = \frac{32\mu_{433}^{3'} - 8\mu_{233}^{3'}}{8\mu_2^1 - 32\mu_4^1}$$

$$(3.3.2.6) \quad \mu_{44}^{2'} = \frac{1}{2\mu_3^1} (\mu_{455}^{3'} - 2\mu_{344}^{3'} - \mu_{4233}^{3'})$$

$$(3.3.2.7) \quad \mu_{55}^{2'} = \frac{1}{2\mu_5^1} (\mu_{544}^{3'} + \mu_{533}^{3'} - \mu_{555}^{3'}) + \frac{1}{2} \mu_{44}^{2'}$$

Las dependencias dadas por las ecuaciones 3.3.2.3 a 3.3.2.7 pueden ser vistas gráficamente así (donde el corchete indica la dependencia de los momentos de izquierda a derecha):

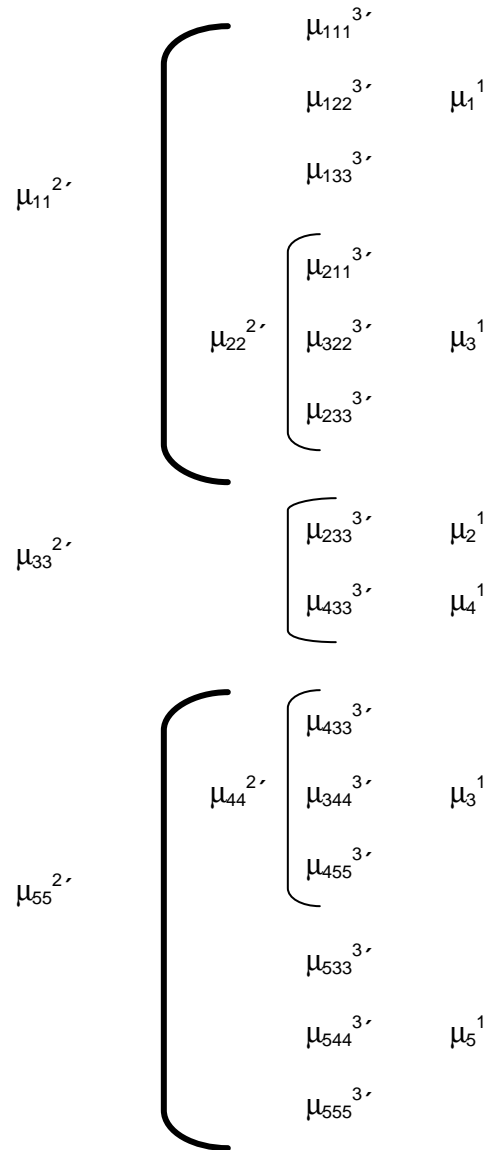


Figura 10. Representación gráfica de la dependencia de los segundos momento de probabilidad turbulentos en función de los primeros momentos de probabilidad y los terceros momentos de probabilidad turbulentos.

Esta gráfica es especialmente reveladora: de los 125 terceros momentos existentes en un sistema de cinco grados de libertad, *sólo 12 afectan a los segundos momentos turbulentos diagonales*. Este descubrimiento es sumamente importante pues reduce el

problema de clausura a conocer sólo unos cuantos parámetros que describen a los segundos momentos. Una vez conocidos estos, los primeros momento pueden ser hallados. Ahora bien, tal como quedo definido el SDD, el valor de todos los momentos de probabilidad dependen de las condiciones iniciales, pues del valor de éstas se obtiene la energía inicial del sistema y, dadas las condiciones que cumple el término bilineal y que fueron explicadas en el numeral 1.2, esta energía inicial se conserva durante la evolución, redistribuyéndose y, para el caso de cinco grados de libertad, acumulándose en el primer y quinto grado de libertad. Por lo tanto hay que hallar una relación entre el valor de los terceros momentos y el valor de las condiciones iniciales.

3.3.3. *Relación entre el valor de las condiciones iniciales y el valor de los terceros momentos turbulentos.*

Las siguientes gráficas (figuras 11 a 32) muestran la relación de los momentos de probabilidad incluidos en las ecuaciones 3.3.2.3 a 3.3.2.7 y el valor de las condiciones iniciales para el SDD de 5 grados de libertad, rango de tiempo entre 100 y 200 seg y diferencial de tiempo de 0.05 seg (todos los grados de libertad tienen el mismo valor de condiciones iniciales en cada conjunto de datos). Además, en la tabla 3 se muestran las ecuaciones de estas relaciones.

Tabla 3. Ecuaciones de relación de los momentos de probabilidad y las condiciones iniciales.

	ECUACIÓN	COEF. R²
m ¹	$y = 0,8425x + 0,0371$	1
m ²	$y = 0,0002x^5 - 0,0022x^4 + 0,01x^3 - 0,0196x^2 + 0,0172x - 0,0059$	0,9424
m ³	$y = -0,0054x^5 + 0,0552x^4 - 0,207x^3 + 0,3477x^2 - 0,2573x + 0,0663$	0,9968
m ⁴	$y = 0,0096x^5 - 0,0955x^4 + 0,3454x^3 - 0,5608x^2 + 0,4008x - 0,0983$	0,9452
m ⁵	$y = 0,8421x + 0,038$	1
m ^{11'}	$y = 0,2781x^2 + 0,0252x + 0,0061$	0,9999
m ^{22'}	$y = 0,9429x^2 + 0,0593x + 0,0315$	1
m ^{33'}	$y = 0,943x^2 + 0,0689x + 0,0122$	1
m ^{44'}	$y = 0,9316x^2 + 0,0854x + 0,0154$	0,9999
m ^{55'}	$y = 0,2756x^2 + 0,0375x - 0,0061$	1
m ^{111'}	$y = 0,3494x^2 - 0,6628x + 0,3225$	0,9965
m ^{122'}	$y = -0,8016x^2 + 1,4962x - 0,7172$	0,9971
m ^{133'}	$y = -0,8276x^2 + 1,5808x - 0,7636$	0,9969

m ^{211'}	$y = -0,0046x^3 + 0,023x^2 - 0,0306x + 0,0105$	0,985
m ^{233'}	$y = 0,0098x^5 - 0,0945x^4 + 0,3291x^3 - 0,5175x^2 + 0,3695x - 0,0915$	0,9963
m ^{322'}	$y = -0,0582x^5 + 0,5757x^4 - 2,0619x^3 + 3,3144x^2 - 2,3588x + 0,575$	0,9351
m ^{344'}	$y = 0,0099x^5 - 0,0965x^4 + 0,3409x^3 - 0,539x^2 + 0,39x - 0,0977$	0,8094
m ^{433'}	$y = -0,0168x^5 + 0,1176x^4 - 0,2397x^3 + 0,1329x^2 + 0,0226x - 0,0215$	1
m ^{455'}	$y = -0,0062x^5 + 0,054x^4 - 0,1635x^3 + 0,2124x^2 - 0,1181x + 0,0231$	0,9954
m ^{533'}	$y = -0,8235x^2 + 1,5842x - 0,7738$	0,9964
m ^{544'}	$y = -0,7769x^2 + 1,4271x - 0,6711$	0,9981
m ^{555'}	$y = 0,3407x^2 - 0,6288x + 0,3034$	0,9962

Nota: en las ecuaciones "y" representa el momento correspondiente y "x" representa el valor de las condiciones iniciales.

Claramente existe una fuerte relación entre las condiciones iniciales y el valor que los momentos toman:

1. Los primeros momentos de valor alto dependen linealmente del valor de las condiciones iniciales.
2. Los términos de la energía turbulenta, al igual que los terceros momentos turbulentos considerados de valor alto e intermedio, dependen de las condiciones iniciales en un polinomio de segundo orden.
3. Aquellos términos que en general son considerados de valor bajo, dependen de las condiciones iniciales con polinomios de orden cinco. Esto puede deberse al diferencial de tiempo utilizado el cual, aunque es del orden de 10^{-2} , no alcanza a detectar las variaciones de la mayoría de estos momentos de probabilidad (un caso especial se da para el momento turbulento 211, el cual depende de las condiciones iniciales con un polinomio de orden tres. Como se verá más adelante, el diferencial de tiempo que este momento necesita para que su valor converja es mayor que para los otros terceros momentos turbulentos de orden bajo).

Ahora bien, estos resultados fueron hallados cuando la energía del sistema se distribuyó uniformemente para todos los grados de libertad en las condiciones iniciales. Por lo tanto, dadas la propiedades del término B_{jk} , es de esperarse que para un mismo valor de energía, no importa como se distribuya la energía por medio de las condiciones iniciales, las relaciones mostradas en la tabla 4 deben conservarse. Es decir, si se distribuye entre los grados de libertad de forma aleatoria un valor de energía determinado,

es de esperarse que los momentos de probabilidad tiendan a un mismo valor. Para comprobar esto se muestran a continuación los porcentajes de diferencia para algunos momentos de probabilidad para el SDD de 5 grados de libertad, calculado tres veces con 15 condiciones iniciales cada vez, con un diferencial de tiempo de 0.1 seg y en el intervalo de tiempo de 100 a 200 seg (cada conjunto de condiciones iniciales es tal que los cinco grados de libertad tienen en conjunto una energía de valor 1).

Tabla 4. Ecuaciones de relación de los momentos de probabilidad y las condiciones iniciales.

	SDD ₁	SDD ₂	SDD ₃	% SDD ₁ , SDD ₂	% SDD ₂ , SDD ₃	% SDD ₃ , SDD ₁
m ¹	0,4175430	0,4101390	0,4048610	1,77%	1,29%	-3,13%
m ²	0,4168200	0,4121870	0,4108200	1,11%	0,33%	-1,46%
m ³	0,0657983	0,0676326	0,0672109	-2,79%	0,62%	2,10%
m ⁴	0,2219440	0,2289400	0,2292190	-3,15%	-0,12%	3,17%
m ⁵	0,2290820	0,2259410	0,2253850	1,37%	0,25%	-1,64%
m ^{11'}	0,2213760	0,2272270	0,2279150	-2,64%	-0,30%	2,87%
m ^{22'}	0,0663337	0,0674002	0,0669784	-1,61%	0,63%	0,96%
m ^{33'}	0,0058483	0,0064744	0,0059218	-10,71%	8,53%	1,24%
m ^{44'}	-0,0127450	-0,0138596	-0,0146736	-8,75%	-5,87%	13,14%
m ^{55'}	-0,0143750	-0,0141669	-0,0127403	1,45%	10,07%	-12,83%
m ^{111'}	-0,0132846	-0,0132368	-0,0139189	0,36%	-5,15%	4,56%
m ^{122'}	-0,0128193	-0,0136028	-0,0135723	-6,11%	0,22%	5,55%
m ^{133'}	0,0056993	0,0058692	0,0055271	-2,98%	5,83%	-3,12%
m ^{533'}	0,4175430	0,4101390	0,4048610	1,77%	1,29%	-3,13%
m ^{544'}	0,4168200	0,4121870	0,4108200	1,11%	0,33%	-1,46%
m ^{555'}	0,0657983	0,0676326	0,0672109	-2,79%	0,62%	2,10%

Con los resultados mostrados en la anterior tabla, se puede comprobar que el valor de cada momento de probabilidad en un SDD definido sólo con el término de conservación de energía, depende de la energía inicial del SDD, la cual se redistribuye entre los grados de libertad.

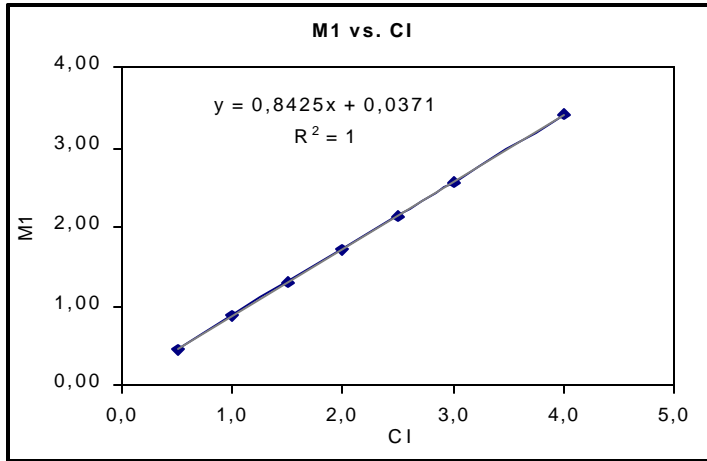


Figura 11. μ^1 vs. ci

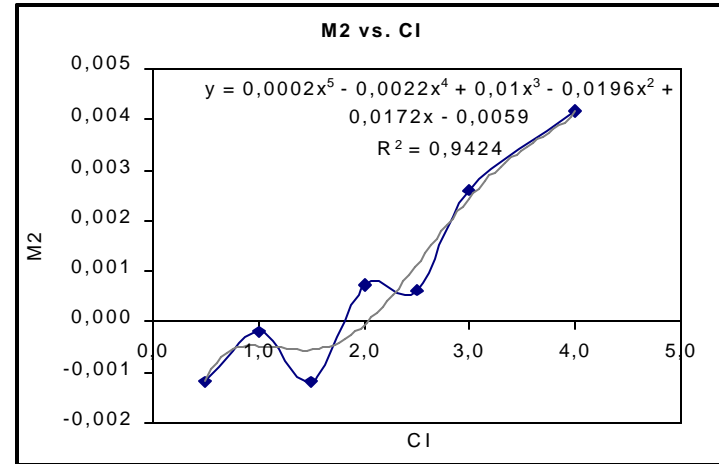


Figura 12. μ^2 vs. ci

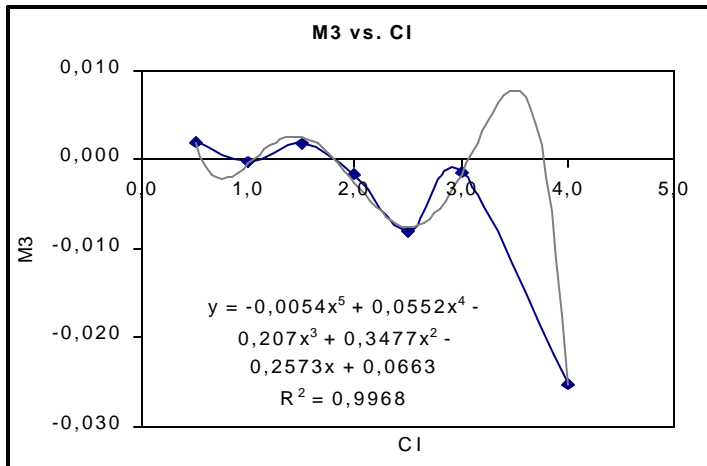


Figura 13. μ^3 vs. ci

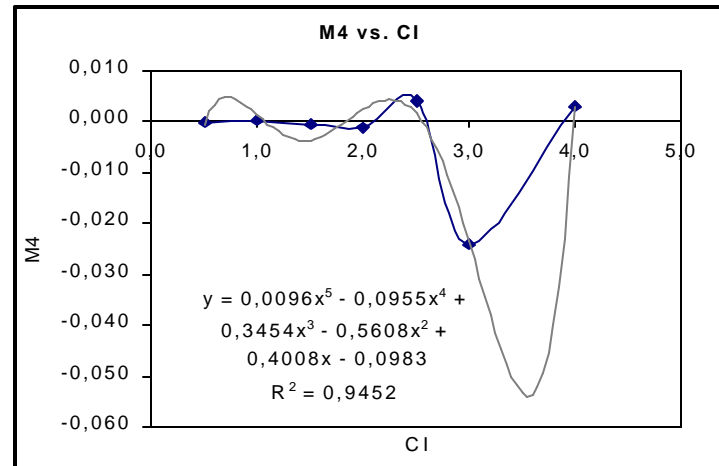


Figura 14. μ^4 vs. ci

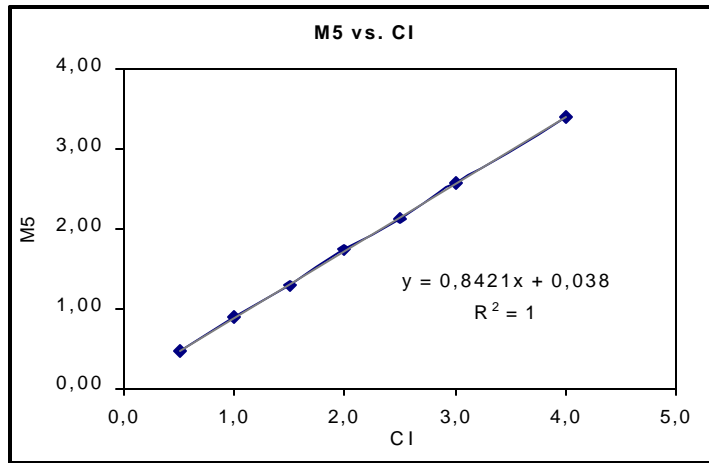


Figura 15. μ^5 vs. ci

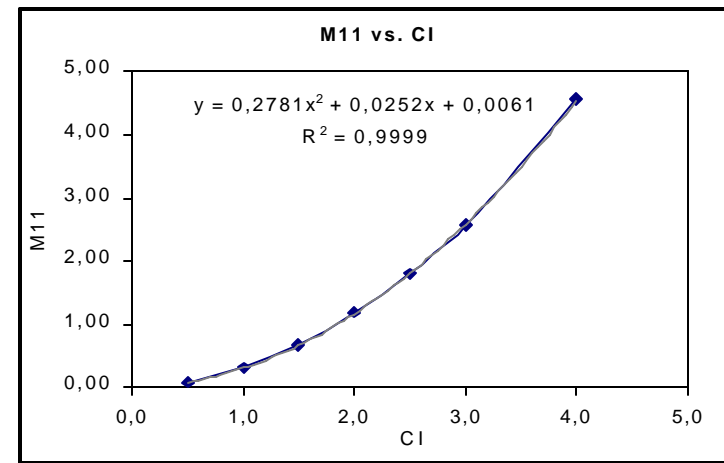


Figura 16. μ^{11} vs. ci

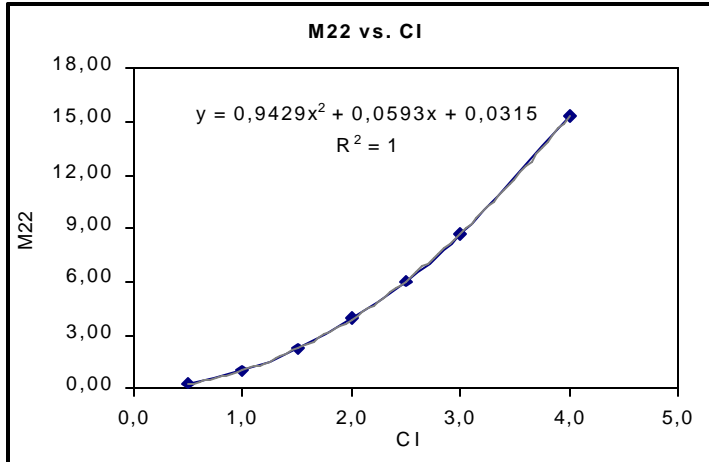


Figura 17. μ^{22} vs. ci

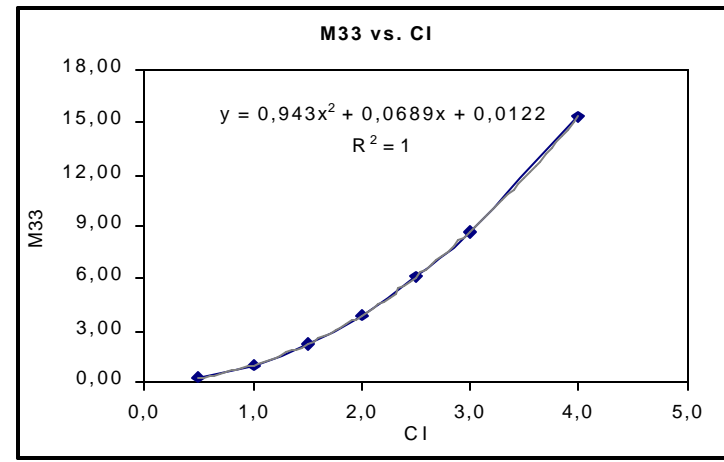


Figura 18. μ^{33} vs. ci

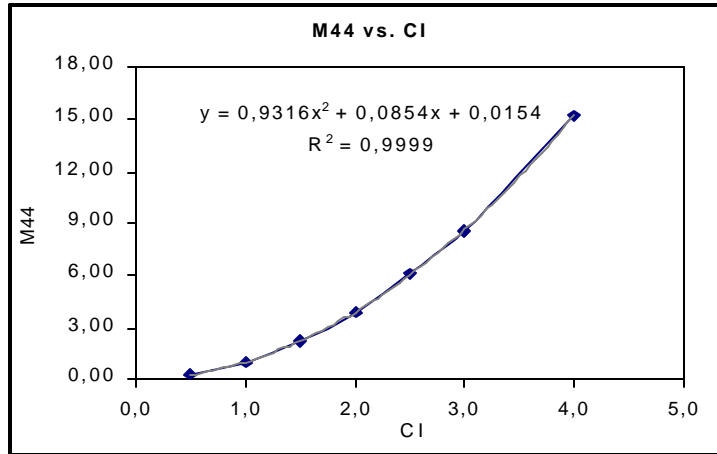


Figura 19. μ^{44} vs. ci

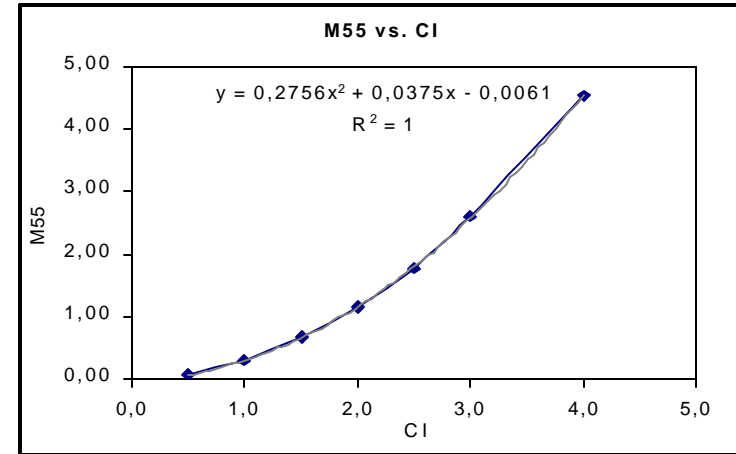


Figura 20. μ^{55} vs. ci

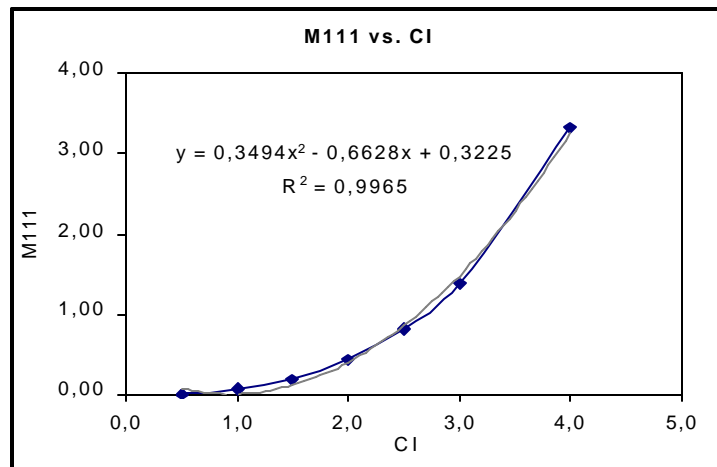


Figura 21. μ^{111} vs. ci

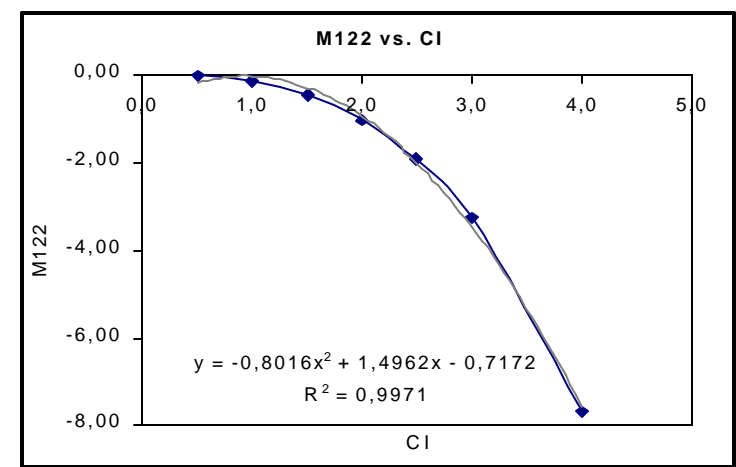


Figura 22. μ^{122} vs. ci

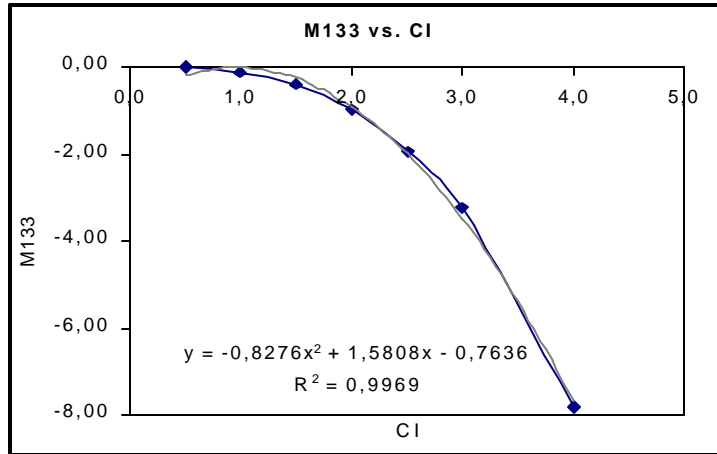


Figura 23. μ^{133} vs. ci

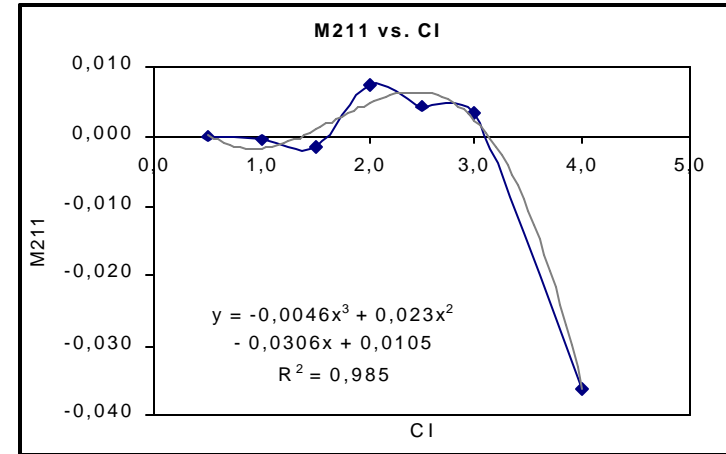


Figura 24. μ^{211} vs. ci

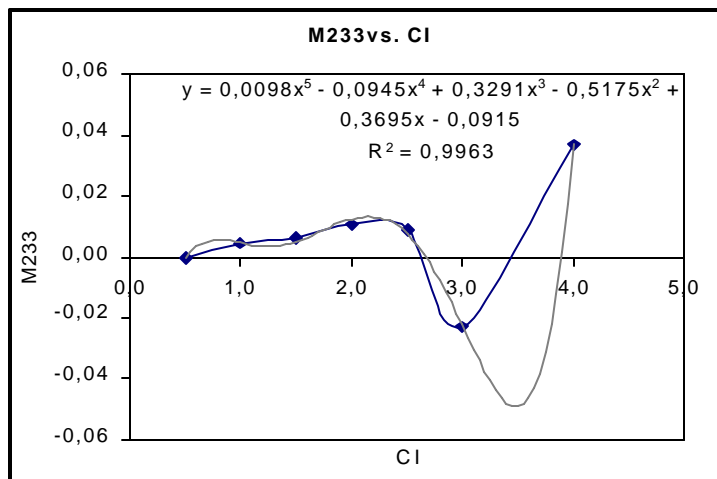


Figura 25. μ^{233} vs. ci

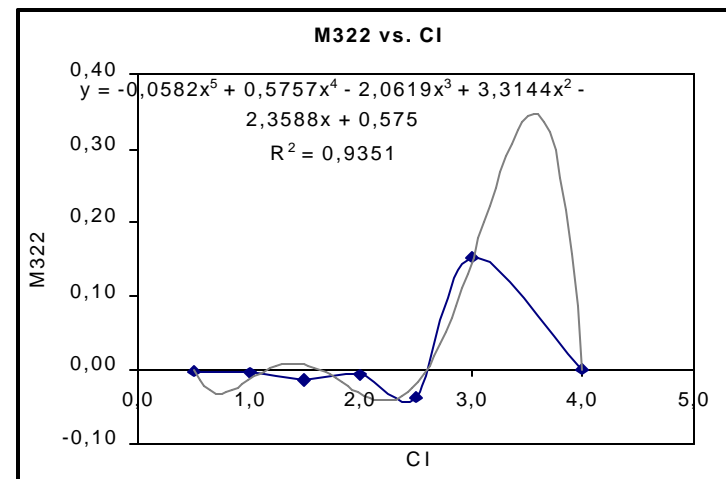


Figura 26. μ^{322} vs. ci

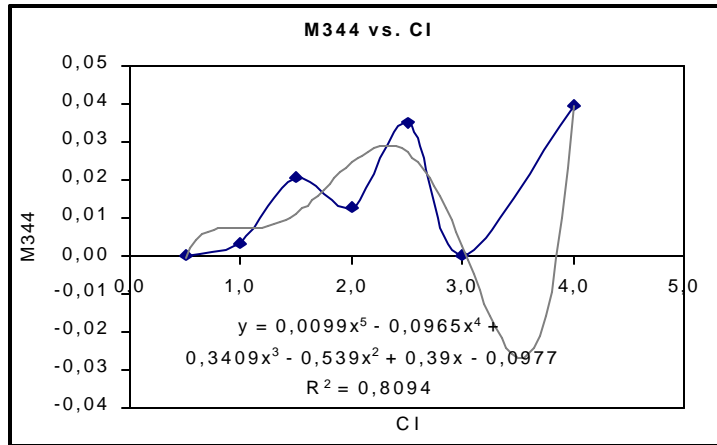


Figura 27. μ^{344} vs. ci

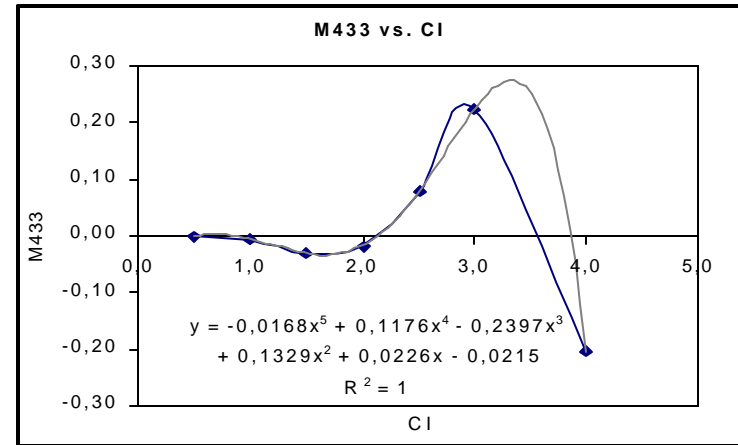


Figura 28. μ^{433} vs. ci

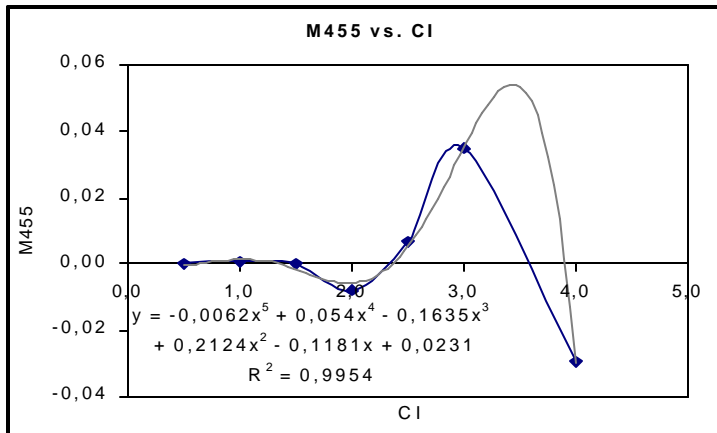


Figura 29. μ^{455} vs. ci

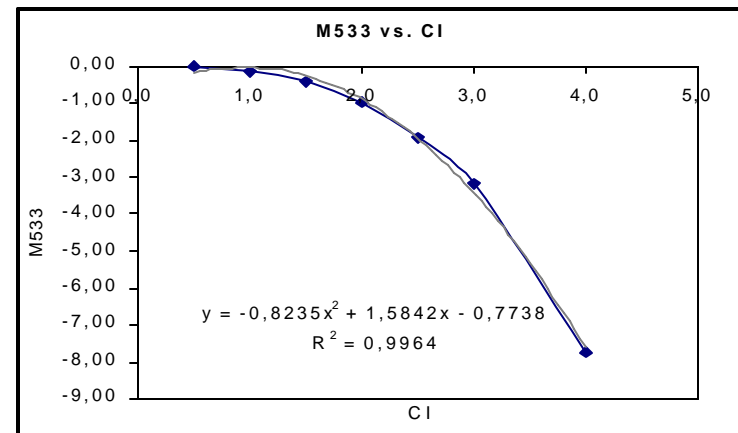


Figura 30. μ^{533} vs. ci

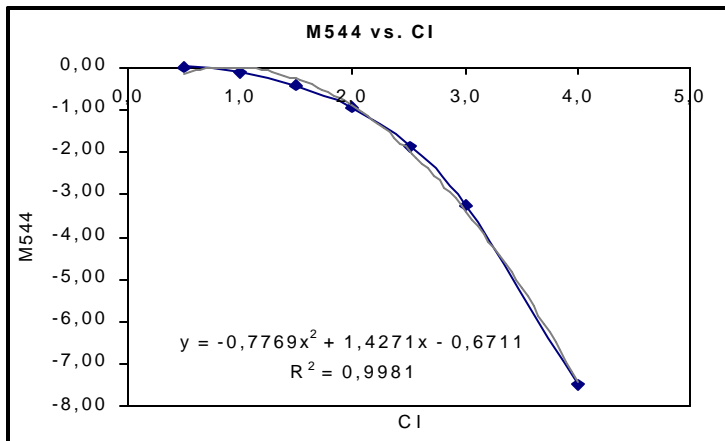


Figura 31. μ^{544} vs. ci

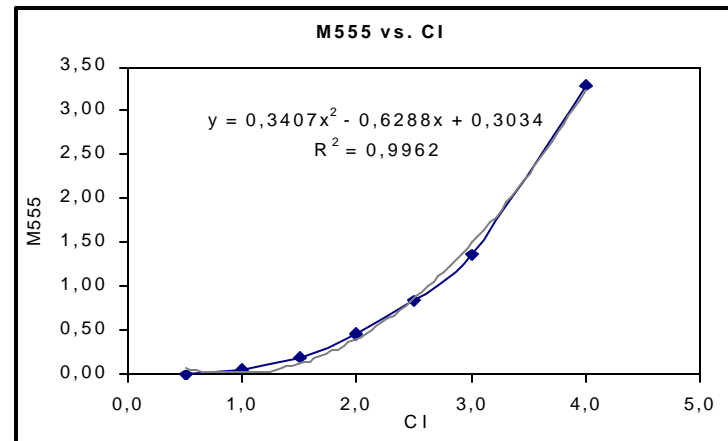


Figura 32. μ^{555} vs. ci

3.3.4. Influencia del diferencial de tiempo en los momentos de probabilidad.

Después de resolver numéricamente el SDD, se promedian las funciones resultantes para cada grado de libertad sobre las condiciones iniciales, obteniendo la función promedio de evolución de cada grado de libertad. Para hallar el promedio, (ecuación 2.1.1), esta función es evaluada en un rango de tiempo cada cierto diferencial de tiempo. Como resultado de esta evaluación, se obtiene un vector de valores cuyo promedio es el primer momento de probabilidad que, como se mostró antes, llega al equilibrio. Es decir, que el rango de tiempo y el diferencial que se utilice, tal como se ve en la ecuación 2.1.1, influyen sobre el valor del promedio obtenido. De aquí que resulte de interés saber cual es esta influencia. En las siguientes páginas se muestran gráficas de la relación que hay entre el valor del diferencial de tiempo (dt) y el valor de los terceros momentos turbulentos (M###) que afectan al valor del primer momento. En ellas puede verse un comportamiento similar: a medida que el diferencial de tiempo de evaluación de la función se hace más pequeño, el valor del tercer momento turbulento va convergiendo. Esta convergencia se da en diferentes diferenciales de tiempo según el orden del valor del tercer momento. En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de diferencia entre valores de los terceros momento turbulentos dados por diferenciales de tiempo consecutivos:

Tabla 5. Porcentaje de diferencia entre valores de los terceros momentos turbulentos.

Rango	M111	M122	M133	M211	M233	M322
0.01-0.02	-0.010288%	0.014018%	0.001496%	1.115542%	-0.117224%	-0.189262%
0.02-0.03	-0.003879%	0.005452%	-0.009722%	-0.779151%	0.273647%	-0.059665%
0.03-0.04	-0.017032%	0.014020%	0.030660%	3.935247%	-4.750354%	-5.408013%
0.04-0.05	-0.011128%	-0.025708%	0.101732%	-2.147670%	-10.407459%	2.499591%
0.05-0.06	0.019388%	-0.028816%	0.505436%	-0.351677%	1.891387%	14.753068%
0.06-0.07	-0.011466%	0.042044%	-0.412424%	7.463113%	38.792000%	50.764500%
0.07-0.08	-0.039115%	-0.284306%	1.931480%	-1.984234%	-66.265144%	-54.991182%
0.08-0.09	-0.006236%	0.265635%	-1.101311%	24.502357%	-12.523103%	-197.602257%
0.09-0.1	-0.049883%	-0.194695%	-2.293533%	-73.278504%	89.396426%	8.489685%
0.1-0.2	3.591647%	5.970184%	3.307000%	-364.066429%	-605.632966%	-41.711448%
0.2-0.3	-6.623104%	4.326514%	-6.591055%	34.529360%	-436.725868%	66.661011%
0.3-0.4	1.052816%	-12.650660%	13.453265%	-332.457618%	41.058011%	63.659561%
0.4-0.5	-3.330170%	-1.091400%	-27.512531%	41.107913%	75.429098%	-2038.25729%
0.5-0.6	5.660211%	17.557623%	11.110750%	-149.959224%	-619.650479%	81.972604%
0.6-0.7	-22.389766%	-28.413274%	-19.434557%	-53.688496%	-45.071136%	79.846287%
0.7-0.8	6.432695%	5.022252%	25.321599%	8.553068%	97.005200%	-161.446284%
0.8-0.9	17.191278%	5.985015%	-0.718699%	40.857325%	-94.602475%	-1.901987%
0.9-1.0	-19.244109%	11.027376%	-21.643898%	24.871522%	-818.537692%	-405.194380%

Continuación Tabla 5.

Rango	M344	M433	M455	M533	M544	M555
0.01-0.02	-0,416715%	0,375312%	-12,314140%	-0,011152%	0,005591%	0,019603%
0.02-0.03	4,861960%	1,491910%	9,350185%	-0,011895%	0,075877%	0,095138%
0.03-0.04	62,843919%	-1,545219%	-33,532378%	-0,028990%	0,199827%	-0,190970%
0.04-0.05	-191,479908%	-29,183552%	-583,117088%	0,214760%	0,381233%	-1,860066%
0.05-0.06	57,760853%	37,452499%	41,591368%	0,328418%	0,868293%	4,040662%
0.06-0.07	-1076,78336%	39,400665%	-297,118634%	1,573532%	-6,919596%	-6,445952%
0.07-0.08	79,194065%	68,394850%	-8,507377%	-4,538726%	5,763308%	3,442247%
0.08-0.09	72,820281%	-1201,21957%	42,651617%	3,933572%	2,197431%	2,753325%
0.09-0.1	-15,682587%	55,085444%	-46,173144%	-3,350089%	-2,709331%	-3,092631%
0.1-0.2	-277,297632%	-152,126407%	24,309088%	-1,630987%	6,742897%	-2,958253%
0.2-0.3	93,755545%	94,368931%	-27,975127%	1,907784%	-9,995446%	2,685340%
0.3-0.4	-3386,23833%	-943,714902%	64,986175%	-11,343595%	13,312398%	-10,916398%
0.4-0.5	21,535072%	79,952386%	-253,746837%	17,484582%	-8,968767%	16,284743%
0.5-0.6	-177,406904%	-356,090539%	-127,488556%	-6,555832%	-4,291019%	-2,078156%
0.6-0.7	-40,351012%	-16,082218%	13,168079%	6,844921%	2,004504%	-9,337619%
0.7-0.8	58,684802%	27,583942%	-44,559359%	-48,955015%	9,801923%	-12,054192%
0.8-0.9	-7,142739%	16,596812%	51,225566%	26,051641%	-3,359528%	16,920308%
0.9-1.0	20,290854%	-205,127534%	78,669084%	15,494614%	-1,862540%	16,570149%

Nota: Los porcentajes fueron hallados utilizando la ecuación: $\%X = (|dt_n| - |dt_{n+1}|) / |dt_n|$, donde dt_n : diferencial de tiempo más bajo, dt_{n+1} : diferencial de tiempo más alto y consecutivo a dt_n .

En la anterior tabla se ve claramente la convergencia de los terceros momentos turbulentos. Utilizando como criterio de convergencia una variación menor al 5% entre valores de momentos obtenidos con diferenciales de tiempo consecutivos, se observa:

1. Hay claramente algunos momentos que convergen con un valor de diferencial de tiempo del orden de 10^{-1} . La razón por la cual algunos momentos turbulentos tienden a converger con diferenciales de tiempo más altos, tiene que ver con el hecho de que estos momentos tienen oscilaciones en su evolución más largas que los momentos turbulentos de valor bajo. Estos momentos son los que anteriormente se identificaron de escala de valor alto ($\mu_{1,2,2}^{3'}$, $\mu_{1,3,3}^{3'}$, $\mu_{5,3,3}^{3'}$, $\mu_{5,4,4}^{3'}$) y escala de valor intermedio ($\mu_{1,1,1}^{3'}$, $\mu_{5,5,5}^{3'}$).

2. Los restantes momentos turbulentos mostrados en la tabla, pertenecen a aquellos cuyo valor se denominó de escala baja. Estos momentos tienden a converger con diferenciales de tiempo del orden de 10^{-2} . El costo computacional de evaluar el SDD con diferenciales de tiempo de este orden en lugar del orden 10^{-1} , es aumentar de 5 a 10 veces el tiempo de computación. El equilibrio mostrado en las tablas 2 y 3, se ve más cercano a medida que se utiliza un diferencial de tiempo menor.

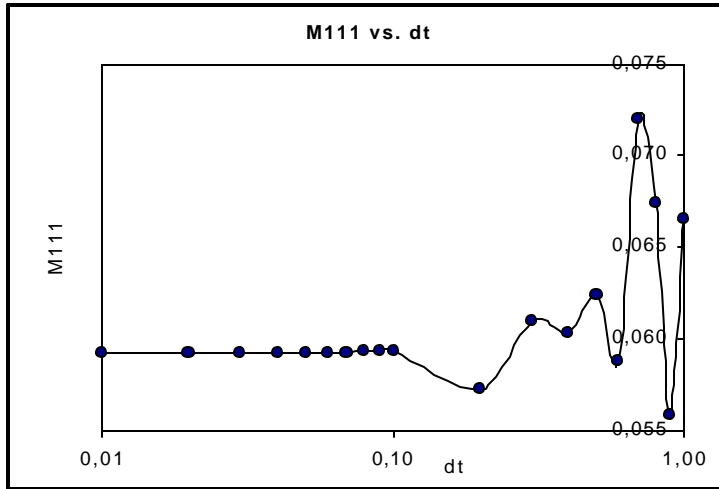


Figura 33. μ'_{111} vs. dt.

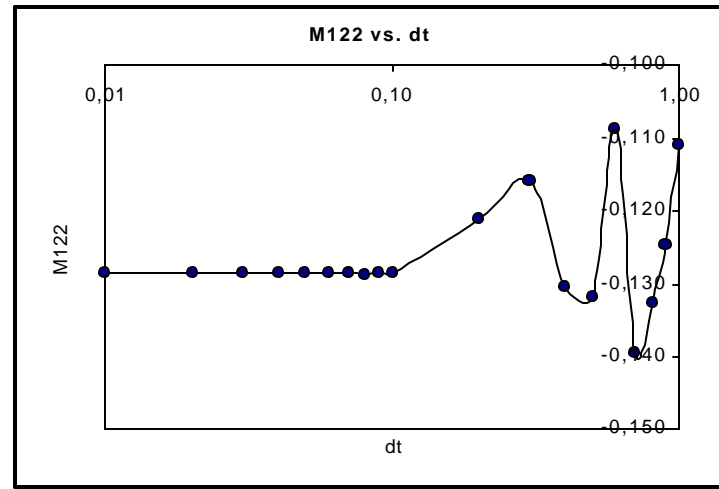


Figura 34. μ'_{122} vs. dt.

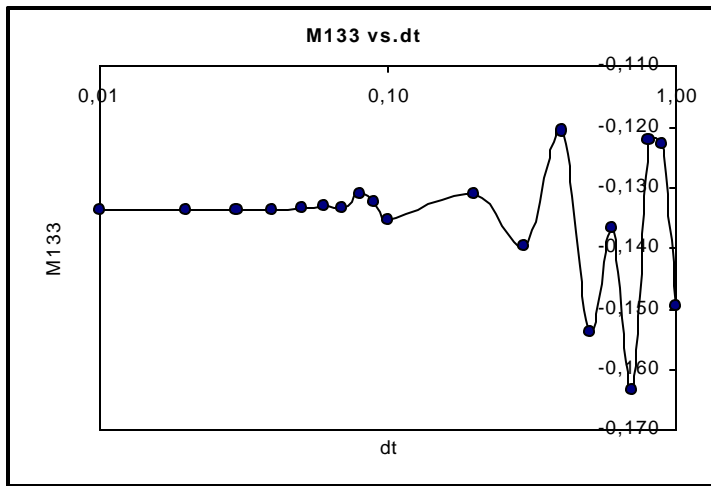


Figura 35. μ'_{133} vs. dt

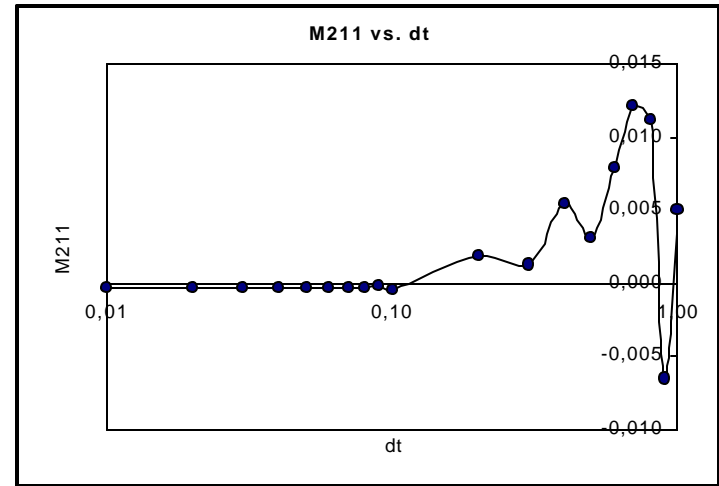


Figura 36. μ'_{211} vs. dt.

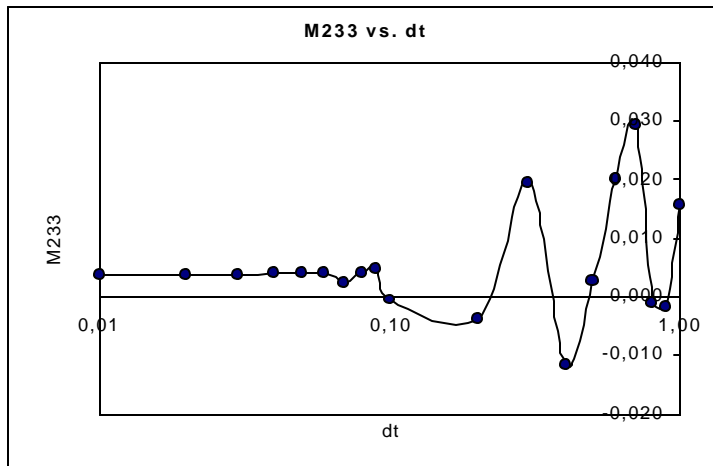


Figura 37. μ_{233} vs. dt.

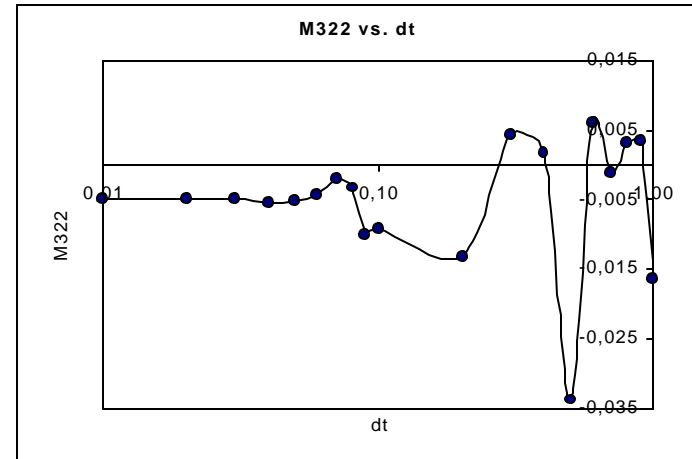


Figura 38. μ_{322} vs. dt.

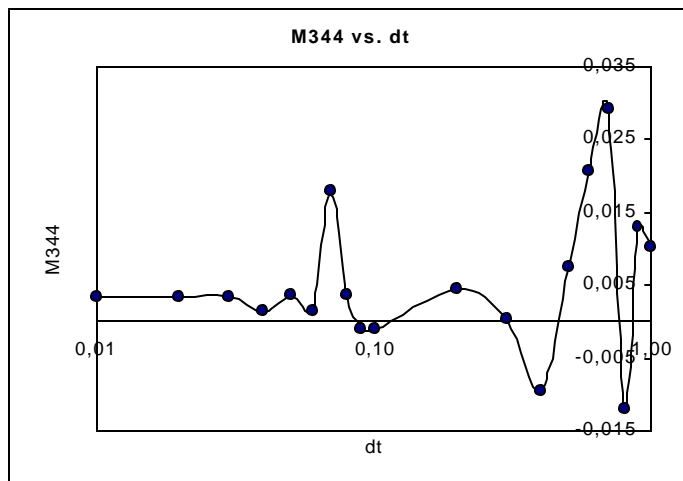


Figura 39. μ_{344} vs. dt.

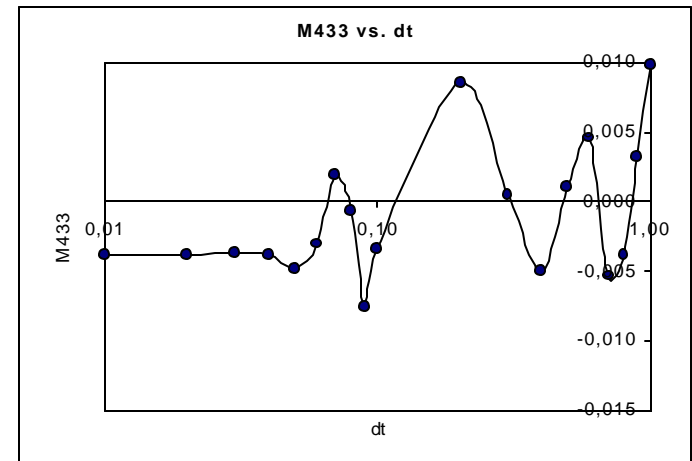


Figura 40. μ_{433} vs. dt.

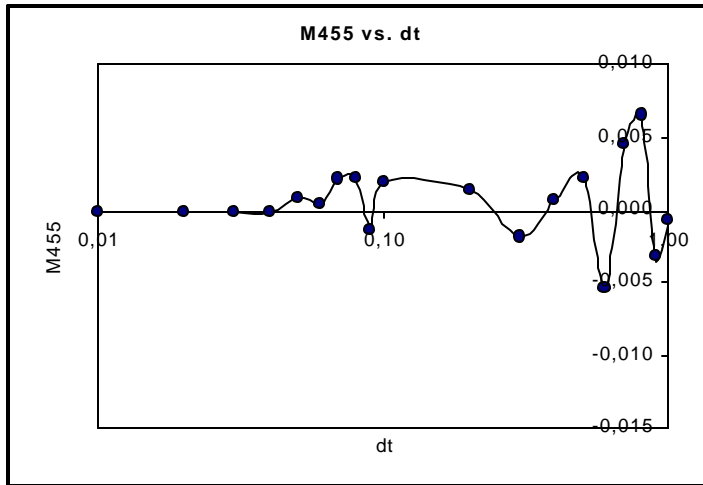


Figura 41. μ_{455} vs. dt.

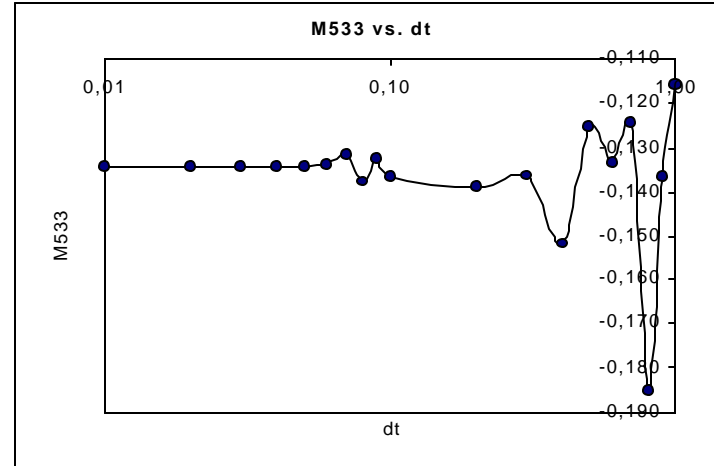


Figura 42. μ_{533} vs. dt.

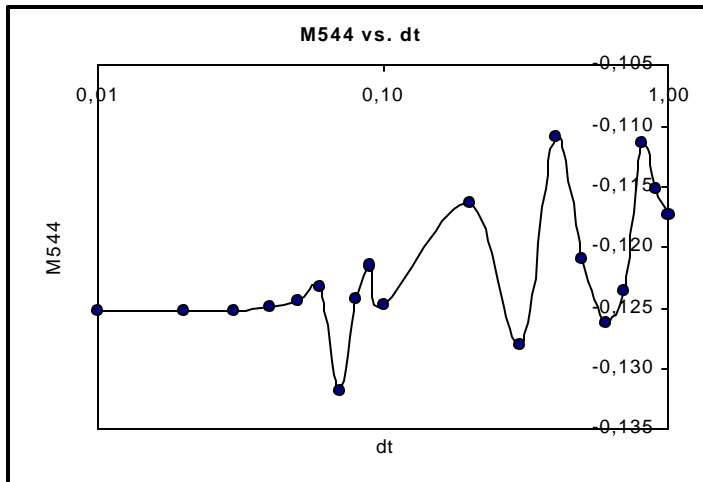


Figura 43. μ_{544} vs. dt.

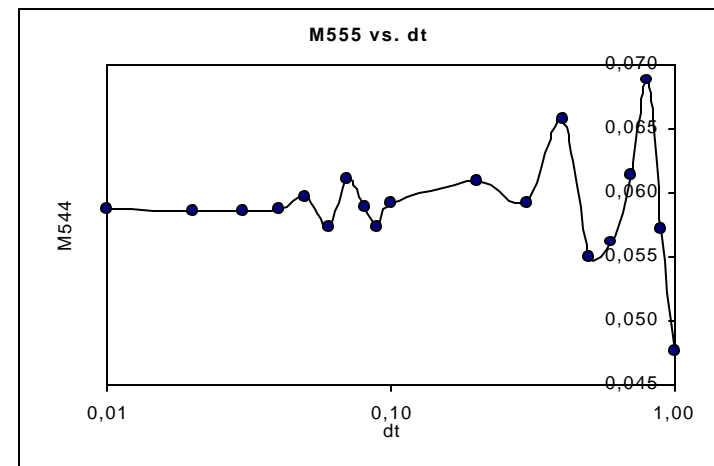


Figura 44. μ_{555} vs. dt.

3.3.5. Influencia de la cantidad de condiciones iniciales en los momentos de probabilidad.

Dado el carácter estadístico de los análisis hechos, la cantidad de condiciones iniciales que se utilicen va a influir en los resultados obtenidos. Sin embargo, debe encontrarse un número de condiciones que no comprometa los tiempos de computación. Para ver la influencia de esta variable, a continuación se muestran los resultados obtenidos para el SDD de 5 grados de libertad, en el intervalo de tiempo $100 < t < 200$ seg, con condiciones iniciales para todos los grados de libertad de 0.05 (se muestran las matrices de primer momento, segundo momento turbulento y de equilibrio de primer momento. Las observaciones pueden extenderse a los demás datos antes explicados).

Tabla 6. Resultados para el SDD de 5 grados de libertad con 15 y 30 condiciones iniciales.

	$\mu_2^T =$			
	$\begin{pmatrix} 0.28757 & 0.000595131 & 0.00226614 & -0.00133001 & -0.0617737 \\ 0.000595131 & 0.977564 & -0.00753756 & 0.00242335 & -0.00257754 \\ 0.00226614 & -0.00753756 & 0.97029 & 0.0101339 & 0.00272807 \\ -0.00133001 & 0.00242335 & 0.0101339 & 0.981368 & 0.0021999 \\ -0.0617737 & -0.00257754 & 0.00272807 & 0.0021999 & 0.28857 \end{pmatrix}$			
15 condiciones iniciales	$\mu_1 =$	$B_{12} \mu_1 \otimes \mu_1 =$	$B_{12} \mu_2^T =$	
	$\begin{pmatrix} 0.850253 \\ -0.000893775 \\ 0.0090144 \\ -0.000394836 \\ 0.854613 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00252024 \\ 2.69258 \\ 0.0532842 \\ -10.866 \\ -0.0134248 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00238053 \\ -2.67058 \\ -0.222723 \\ 10.9886 \\ 0.0351984 \end{pmatrix}$	
	$\mu_2^T =$			
	$\begin{pmatrix} 0.299789 & 0.00119337 & 0.000924759 & 0.00101801 & -0.0635874 \\ 0.00119337 & 1.02013 & -0.010409 & -0.000921938 & 0.000175439 \\ 0.000924759 & -0.010409 & 1.00738 & 0.00742479 & 0.00254277 \\ 0.00101801 & -0.000921938 & 0.00742479 & 1.02035 & 0.0029834 \\ -0.0635874 & 0.000175439 & 0.00254277 & 0.0029834 & 0.300266 \end{pmatrix}$			
30 condiciones iniciales	$\mu_1 =$	$B_{12} \mu_1 \otimes \mu_1 =$	$B_{12} \mu_2^T =$	
	$\begin{pmatrix} 0.851369 \\ -0.00113349 \\ 0.00833069 \\ -0.00087872 \\ 0.857398 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00540818 \\ 2.78023 \\ 0.0746677 \\ -11.3841 \\ -0.0250783 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00477347 \\ -2.74709 \\ -0.162133 \\ 11.3732 \\ 0.0477343 \end{pmatrix}$	

Al comparar los valores obtenidos utilizando 15 o 30 condiciones iniciales, se observa que las diferencias entre los valores no va más allá del 10%. Aunque lo ideal sería hallar

la convergencia de estos valores mediante un procedimiento similar al utilizado para ver la influencia del diferencial de tiempo, el costo computacional de ir de 15 condiciones iniciales a 30 condiciones iniciales es aumentar cinco veces el tiempo de computación, por lo que utilizar mayor cantidad de condiciones iniciales en un proceso recursivo, lleva a tiempos que se vuelven imprácticos para el equipo computacional utilizado.

3.3.6. Equilibrio de los momentos de probabilidad para SDD con más de cinco grados de libertad.

Los resultados presentados hasta ahora corresponden al SDD evaluado en cinco grados de libertad. Sin embargo, los resultados obtenidos y las estructuras generales observadas no son excluyentes para este número de grados de libertad. A continuación se muestran los resultados obtenidos para el equilibrio del primer momento y el equilibrio del segundo momento para el SDD con seis grados de libertad y para el SDD con siete grados de libertad, ambos utilizando quince condiciones iniciales.

Tabla 7. Equilibrio del primer momento de probabilidad para el SDD de 6 y 7 grados de libertad.

SDD de 6 grados de libertad						
$\mu_2^1 =$						
$\begin{pmatrix} 0.293005 \\ 0.0000399653 \\ 0.00858944 \\ -0.0025914 \\ -0.00308957 \\ -0.0506127 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0000399653 \\ 0.944744 \\ -0.00196032 \\ 0.00331419 \\ -0.00613513 \\ 0.0100409 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00858944 \\ -0.00196032 \\ 0.928774 \\ -0.00276804 \\ 0.927375 \\ -0.00286706 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0025914 \\ 0.00331419 \\ 0.928774 \\ 0.927375 \\ -0.000798759 \\ -0.000267386 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00308957 \\ -0.00613513 \\ -0.00486417 \\ 0.942602 \\ 0.942602 \\ -0.00201037 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0506127 \\ 0.0100409 \\ -0.00286706 \\ -0.000267386 \\ -0.00201037 \\ 0.294763 \end{pmatrix}$	
$\mu_1 =$	$B_{12} \mu_2^1 =$	$B_{12} \mu_1 \otimes \mu_1 =$				
$\begin{pmatrix} 0.834144 \\ -0.000197469 \\ 0.0112162 \\ -0.0126747 \\ 0.0109052 \\ 0.838929 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.000159861 \\ -2.52739 \\ 0.175399 \\ -0.217836 \\ 20.2308 \\ -0.064332 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000148404 \\ 2.56064 \\ -0.101999 \\ 0.0555078 \\ -20.9048 \\ 0.312146 \end{pmatrix}$				
SDD de 7 grados de libertad						
$\mu_2^1 =$						
$\begin{pmatrix} 0.30488 \\ 0.000601952 \\ -0.00763734 \\ 9.29289 \times 10^{-6} \\ -0.0000796824 \\ -0.00867453 \\ -0.0450575 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.000601952 \\ 0.947993 \\ 0.00296031 \\ 0.944313 \\ 0.00282697 \\ 0.00157839 \\ -0.00338874 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00763734 \\ 0.00296031 \\ 0.944313 \\ -0.00623043 \\ 0.00109643 \\ 0.00115371 \\ 0.00337615 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9.29289 \times 10^{-6} \\ 0.00282697 \\ -0.00623043 \\ 0.952729 \\ 0.000445636 \\ 0.951382 \\ -0.00283007 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0000796824 \\ 0.00157839 \\ 0.00109643 \\ 0.000445636 \\ 0.951382 \\ 0.00812662 \\ -0.0069797 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00867453 \\ 0.00115371 \\ 0.00337615 \\ 0.0020971 \\ 0.00812662 \\ 0.958265 \\ -0.00915923 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0450575 \\ -0.00338874 \\ 0.00337615 \\ -0.00283007 \\ -0.0069797 \\ -0.00915923 \\ 0.305335 \end{pmatrix}$

$\mu_1 =$	$B_{12} \mu_1 \otimes \mu_1 =$	$B_{12} \mu_2' =$
$\begin{pmatrix} 0.842015 \\ 0.00043579 \\ -0.0138301 \\ 0.0060157 \\ 0.00740263 \\ 0.0204374 \\ 0.834036 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0023083 \\ 2.61525 \\ 0.00784339 \\ -0.0718918 \\ 0.174965 \\ -41.6878 \\ 1.20149 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00240781 \\ -2.58141 \\ 0.0736438 \\ -0.177204 \\ -0.690119 \\ 41.607 \\ -0.586191 \end{pmatrix}$

Tabla 8. Equilibrio del segundo momento de probabilidad para el SDD de 6 y 7 grados de libertad.

$\mu^1 \mu^{2'}$						SDD de 6 grados de libertad					
$\begin{pmatrix} 0.249679 \\ -0.0000858788 \\ 0.00768949 \\ -0.00252162 \\ -0.00179309 \\ -0.0435454 \\ -0.000442787 \\ -0.00606305 \\ 0.000673357 \\ 0.000669885 \\ 0.000162807 \\ -0.000854093 \\ 0.00345112 \\ -0.00256677 \\ -0.00651288 \\ -0.000406133 \\ 0.000303134 \\ -0.00044831 \\ -0.00252055 \\ -0.0000758522 \\ -0.0025483 \\ -0.0096844 \\ 0.0000166851 \\ 0.000355302 \\ 0.00259395 \\ -0.000823255 \\ -0.0000613497 \\ 0.00378413 \\ -0.0094685 \\ -0.000837232 \\ 0.244164 \\ -0.000689504 \\ 0.00665479 \\ -0.00111154 \\ -0.0027735 \\ -0.0443848 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0000858788 \\ 0.78211 \\ -0.00270541 \\ 0.00174533 \\ -0.00315107 \\ 0.00770494 \\ -0.00606305 \\ -0.00402067 \\ -0.00247233 \\ 0.00187616 \\ 0.000796596 \\ -0.00686382 \\ -0.00256677 \\ 0.00893253 \\ -0.00235164 \\ -0.00119265 \\ 0.000273292 \\ -0.00110414 \\ -0.0000758522 \\ -0.0145513 \\ 0.000865972 \\ -0.000790166 \\ 0.00341246 \\ -0.00142905 \\ -0.000823255 \\ 0.0150245 \\ -0.00233835 \\ 0.00270806 \\ 0.000119318 \\ -0.000468219 \\ -0.000689504 \\ 0.784027 \\ -0.00116706 \\ 0.00306728 \\ -0.00476526 \\ 0.00859185 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.00768949 \\ -0.00270541 \\ 0.767938 \\ -0.000766671 \\ -0.00377416 \\ -0.00259392 \\ 0.000673357 \\ -0.00247233 \\ 0.00196463 \\ 0.00254119 \\ 0.000607622 \\ -0.0013944 \\ -0.00651288 \\ -0.00235164 \\ 0.0102839 \\ 0.000475669 \\ 0.00163872 \\ -0.00819424 \\ -0.0025483 \\ 0.000865972 \\ -0.0104483 \\ -0.00203597 \\ -0.00108115 \\ -0.00002786 \\ -0.0000613497 \\ -0.00233835 \\ 0.00363684 \\ -0.0000551835 \\ -0.00148689 \\ -0.000206894 \\ 0.00665479 \\ -0.00116706 \\ 0.771642 \\ -0.00364876 \\ -0.00467209 \\ -0.00363303 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00252162 \\ 0.00174533 \\ -0.000766671 \\ 0.766268 \\ -0.00126492 \\ -0.000526611 \\ 0.000669885 \\ 0.00187616 \\ 0.00254119 \\ 0.0014683 \\ 0.00128361 \\ 0.00105575 \\ -0.000406133 \\ -0.00119265 \\ 0.000475669 \\ 0.0115134 \\ 0.000591401 \\ 0.0000175932 \\ -0.0096844 \\ -0.000790166 \\ -0.00203597 \\ -0.0119012 \\ -0.000276518 \\ -0.00788245 \\ 0.00378413 \\ 0.00270806 \\ -0.0000551835 \\ 0.0094715 \\ 0.000927773 \\ 0.000192943 \\ -0.00111154 \\ 0.00306728 \\ -0.00364876 \\ 0.770618 \\ -0.00073877 \\ -0.000562864 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.00179309 \\ -0.00315107 \\ -0.00377416 \\ -0.00126492 \\ 0.780351 \\ -0.0013933 \\ 0.000162807 \\ 0.000796596 \\ 0.000607622 \\ 0.00128361 \\ -0.00328603 \\ -0.000382489 \\ 0.000303134 \\ 0.000273292 \\ 0.00163872 \\ 0.000591401 \\ 0.010682 \\ 0.00122882 \\ 0.0000166851 \\ 0.00341246 \\ -0.00108115 \\ -0.000276518 \\ -0.0116744 \\ 0.00074552 \\ -0.0094685 \\ 0.000119318 \\ -0.00148689 \\ 0.000927773 \\ 0.0117442 \\ -0.00722996 \\ -0.0027735 \\ -0.00476526 \\ -0.00467209 \\ -0.00073877 \\ 0.784916 \\ -0.00269558 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0435454 \\ 0.00770494 \\ -0.00259392 \\ -0.000526611 \\ -0.0013933 \\ 0.244217 \\ -0.000854093 \\ -0.00686382 \\ -0.0013944 \\ 0.00105575 \\ -0.000382489 \\ 0.000398054 \\ -0.00044831 \\ -0.00110414 \\ -0.00819424 \\ 0.0000175932 \\ 0.00122882 \\ 0.00253292 \\ 0.0000355302 \\ -0.00142905 \\ -0.00002786 \\ -0.00788245 \\ 0.00074552 \\ -0.00439203 \\ -0.000837232 \\ -0.000468219 \\ -0.000206894 \\ 0.000192943 \\ -0.00722996 \\ 0.00461979 \\ -0.0443848 \\ 0.00859185 \\ -0.00363303 \\ -0.000562864 \\ -0.00269558 \\ 0.252347 \end{pmatrix}$						

$B_{i,j,k} (\mu_j^1 \mu_{m,k}^{2'} + \mu_k^1 \mu_{m,j}^{2'}) + B_{m,j,k} (\mu_j^1 \mu_{i,k}^{2'} + \mu_k^1 \mu_{i,j}^{2'})$					
$\begin{pmatrix} 0.00422933 \\ -1.03951 \\ 0.105767 \\ -0.0603423 \\ 2.29359 \\ -0.142947 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.03951 \\ -0.0671109 \\ -0.0382799 \\ -0.312307 \\ -0.537023 \\ -0.430292 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.105767 \\ -0.0382799 \\ 0.302064 \\ 0.407441 \\ 0.11256 \\ -0.149659 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0603423 \\ -0.312307 \\ 0.407441 \\ -0.465774 \\ -0.561933 \\ -0.0784363 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.29359 \\ -0.537023 \\ 0.11256 \\ -0.561933 \\ -0.0342537 \\ 8.24627 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.142947 \\ -0.430292 \\ -0.149659 \\ -0.0784363 \\ 8.24627 \\ 0.123149 \end{pmatrix}$

$$B_{i,j,k} \mu_{m,j,k}^{3'} + B_{m,j,k} \mu_{i,j,k}^{3'}$$

(-0.00514099)	(1.02517)	(0.0539938)	(0.00342639)	(-2.54437)	(0.0446353)
(1.02517)	(0.14419)	(0.0374084)	(0.191883)	(-0.0770261)	(0.187665)
(0.0539938)	(0.0374084)	(-0.173736)	(-0.540171)	(-0.246672)	(-0.144298)
(0.00342639)	(0.191883)	(-0.540171)	(0.0167362)	(0.766139)	(0.194419)
(-2.54437)	(-0.0770261)	(-0.246672)	(0.766139)	(0.299289)	(-8.64272)
(0.0446353)	(0.187665)	(-0.144298)	(0.194419)	(-8.64272)	(-0.281339)

$$\mu^{3'}$$

(0.0680579)	(0.000642624)	(0.00589154)	(0.000709364)	(-0.000173558)	(-0.0232404)
(0.000642624)	(-0.0991255)	(0.00349363)	(0.000769377)	(0.00306361)	(0.000939121)
(0.00589154)	(0.00349363)	(-0.0960975)	(-0.00240994)	(-0.000962099)	(-0.00395679)
(0.000709364)	(0.000769377)	(-0.00240994)	(-0.101055)	(-0.00107213)	(0.00307251)
(-0.000173558)	(0.00306361)	(-0.000962099)	(-0.00107213)	(-0.0955647)	(0.00151224)
(-0.0232404)	(0.000939121)	(-0.00395679)	(0.00307251)	(0.00151224)	(-0.0224623)
(0.000642624)	(-0.0991255)	(0.00349363)	(0.000769377)	(0.00306361)	(0.000939121)
(-0.0991255)	(-0.000815418)	(-0.0103017)	(-0.00365312)	(-0.00225602)	(-0.0997734)
(0.00349363)	(-0.0103017)	(0.0032222)	(-0.00129367)	(-0.00730296)	(0.00267084)
(0.000769377)	(-0.00365312)	(-0.00129367)	(-0.00337294)	(-0.0032878)	(0.000979008)
(0.00306361)	(-0.00225602)	(-0.00730296)	(-0.0032878)	(-0.00287022)	(-0.00243632)
(0.000939121)	(-0.0997734)	(0.00267084)	(0.000979008)	(-0.00243632)	(0.000174261)
(0.00589154)	(0.00349363)	(-0.0960975)	(-0.00240994)	(-0.000962099)	(-0.00395679)
(0.00349363)	(-0.0103017)	(0.0032222)	(-0.00129367)	(-0.00730296)	(0.00267084)
(-0.0960975)	(0.0032222)	(-0.00991689)	(0.00341062)	(-0.00783994)	(-0.0949888)
(-0.00240994)	(-0.00129367)	(0.00341062)	(-0.0046533)	(0.00765804)	(0.00528152)
(-0.000962099)	(-0.00730296)	(-0.00783994)	(0.00765804)	(0.000615237)	(-0.00205185)
(-0.00395679)	(0.00267084)	(-0.0949888)	(0.00528152)	(-0.00205185)	(0.00175017)
(0.000709364)	(0.000769377)	(-0.00240994)	(-0.101055)	(-0.00107213)	(0.00307251)
(0.000769377)	(-0.00365312)	(-0.00129367)	(-0.00337294)	(-0.0032878)	(0.000979008)
(-0.00240994)	(-0.00129367)	(0.00341062)	(-0.0046533)	(0.00765804)	(0.00528152)
(-0.101055)	(-0.00337294)	(-0.0046533)	(0.0242422)	(-0.000687433)	(-0.0991711)
(-0.00107213)	(-0.0032878)	(0.00765804)	(-0.000687433)	(0.00193583)	(0.000497507)
(0.00307251)	(0.000979008)	(0.00528152)	(-0.0991711)	(0.000497507)	(-0.00295757)
(-0.000173558)	(0.00306361)	(-0.000962099)	(-0.00107213)	(-0.0955647)	(0.00151224)
(0.00306361)	(-0.00225602)	(-0.00730296)	(-0.0032878)	(-0.00287022)	(-0.00243632)
(-0.000962099)	(-0.00730296)	(-0.00783994)	(0.00765804)	(0.000615237)	(-0.00205185)
(-0.00107213)	(-0.0032878)	(0.00765804)	(-0.000687433)	(0.00193583)	(0.000497507)
(-0.0955647)	(-0.00287022)	(0.000615237)	(0.00193583)	(-0.00205407)	(-0.104499)
(0.00151224)	(-0.00243632)	(-0.00205185)	(0.000497507)	(-0.104499)	(-0.00439592)
(-0.0232404)	(0.000939121)	(-0.00395679)	(0.00307251)	(0.00151224)	(-0.0224623)
(0.000939121)	(-0.0997734)	(0.00267084)	(0.000979008)	(-0.00243632)	(0.000174261)
(-0.00395679)	(0.00267084)	(-0.0949888)	(0.00528152)	(-0.00205185)	(0.00175017)
(0.00307251)	(0.000979008)	(0.00528152)	(-0.0991711)	(0.000497507)	(-0.00295757)
(0.00151224)	(-0.00243632)	(-0.00205185)	(0.000497507)	(-0.104499)	(-0.00439592)
(-0.0224623)	(0.000174261)	(0.00175017)	(-0.00295757)	(-0.00439592)	(0.0666635)

SDD de 7 grados de libertad

$$B_{i,j,k} (\mu_j^1 \mu_{m,k}^{2'} + \mu_k^1 \mu_{m,j}^{2'}) + B_{m,j,k} (\mu_j^1 \mu_{i,k}^{2'} + \mu_k^1 \mu_{i,j}^{2'})$$

(-0.0060194)	(-0.993688)	(-0.0215047)	(-0.0670365)	(0.120595)	(4.00535)	(-0.524495)
(-0.993688)	(0.223658)	(-0.0711383)	(0.124213)	(0.11314)	(0.5893)	(0.0186978)
(-0.0215047)	(-0.0711383)	(-0.211973)	(-0.205286)	(-0.0341546)	(0.00144624)	(0.022283)
(-0.0670365)	(0.124213)	(-0.205286)	(-0.695287)	(0.151451)	(0.312948)	(0.253407)
(0.120595)	(0.11314)	(-0.0341546)	(0.151451)	(-2.54674)	(0.542094)	(0.366474)
(4.00535)	(0.5893)	(0.00144624)	(0.312948)	(0.542094)	(2.73647)	(15.9136)
(-0.524495)	(0.0186978)	(0.022283)	(0.253407)	(0.366474)	(15.9136)	(-0.287951)

$$B_{l,j,k} \mu_{m,j,k} + B_{m,j,k} \mu_{l,j,k}$$

(0.00651414)	(0.981212)	(-0.0316125)	(0.150222)	(-0.0860015)	(-3.7304)	(-0.0378172)
(0.981212)	(-0.258733)	(0.153377)	(-0.0103927)	(-0.919064)	(0.600589)	(0.346013)
(-0.0316125)	(0.153377)	(0.15912)	(-0.430173)	(0.644808)	(-0.0241516)	(0.230817)
(0.150222)	(-0.0103927)	(-0.430173)	(0.210043)	(0.741108)	(-0.671139)	(-0.0293609)
(-0.0860015)	(-0.919064)	(0.644808)	(0.741108)	(-0.790931)	(-0.744262)	(-0.26017)
(-3.7304)	(0.600589)	(-0.0241516)	(-0.671139)	(-0.744262)	(0.691939)	(-16.4842)
(-0.0378172)	(0.346013)	(0.230817)	(-0.0293609)	(-0.26017)	(-16.4842)	(-0.0179524)

$\mu^1 \mu^2$

(0.264301)	(0.00147585)	(-0.00585466)	(0.000767854)	(0.0000223159)	(-0.00784654)	(-0.0399624)
(0.00147585)	(0.794491)	(0.0024343)	(0.00250042)	(0.00361904)	(0.00672657)	(-0.00375177)
(-0.00585466)	(0.0024343)	(0.787683)	(-0.00511619)	(-0.0000562928)	(-0.000628251)	(0.00333545)
(0.000767854)	(0.00250042)	(-0.00511619)	(0.793853)	(0.000613192)	(0.00239686)	(-0.00212425)
(0.0000223159)	(0.00361904)	(-0.0000562928)	(0.000613192)	(0.796198)	(0.00671001)	(-0.00561018)
(-0.00784654)	(0.00672657)	(-0.000628251)	(0.00239686)	(0.00671001)	(0.801206)	(-0.00752739)
(-0.0399624)	(-0.00375177)	(0.00333545)	(-0.00212425)	(-0.00561018)	(-0.00752739)	(0.254822)
(-0.000723422)	(-0.00608691)	(0.00308802)	(-0.000360153)	(-0.000668503)	(-0.00129534)	(0.00120143)
(-0.00608691)	(0.000620618)	(-0.000487645)	(-0.000114926)	(-0.00192992)	(0.000303004)	(-0.00589845)
(0.00308802)	(-0.000487645)	(0.00194164)	(-0.00476087)	(-0.00107762)	(-0.00219519)	(-0.000316355)
(-0.000360153)	(-0.000114926)	(-0.00476087)	(0.000905185)	(0.000275342)	(0.000859069)	(0.00185731)
(-0.000668503)	(-0.00192992)	(-0.00107762)	(0.000275342)	(0.000162051)	(-0.00333397)	(0.000171925)
(-0.00129534)	(0.000303004)	(-0.00219519)	(0.000859069)	(-0.00333397)	(-0.00127427)	(0.000353259)
(0.00120143)	(-0.00089845)	(-0.000316355)	(0.00185731)	(0.000171925)	(0.000353259)	(0.00222833)
(-0.0050034)	(0.0000983992)	(-0.00887669)	(0.000564262)	(-0.000677199)	(0.00112171)	(0.000188821)
(0.0000983992)	(-0.0131025)	(0.00108741)	(0.00181456)	(-0.00022777)	(-0.00318079)	(0.00171538)
(-0.00887669)	(0.00108741)	(-0.0105803)	(-0.00125025)	(0.00238521)	(0.000366377)	(-0.00661174)
(0.000564262)	(0.00181456)	(-0.00125025)	(-0.0170217)	(-0.00315214)	(0.000981837)	(-0.00103647)
(-0.000677199)	(-0.00022777)	(0.00238521)	(-0.00315214)	(-0.0118631)	(-0.00150577)	(0.00170708)
(0.00112171)	(-0.00318079)	(0.000366377)	(0.000981837)	(-0.00150577)	(-0.0128224)	(0.000302446)
(0.000188821)	(0.00171538)	(-0.00661174)	(-0.00103647)	(0.00170708)	(0.000302446)	(-0.00375963)
(0.00131617)	(0.0017054)	(0.000782575)	(-0.00667368)	(0.000621512)	(-0.000295585)	(0.000205937)
(0.0017054)	(0.004299)	(0.000329841)	(0.000373098)	(-0.00094853)	(0.000307113)	(-0.00060274)
(0.000782575)	(0.000329841)	(0.00828499)	(-0.000140973)	(-0.000630707)	(0.0010329)	(-0.000396467)
(-0.00667368)	(0.000373098)	(-0.000140973)	(0.0034544)	(0.000700911)	(-0.0012165)	(-0.0035303)
(0.000621512)	(-0.00094853)	(-0.000630707)	(0.000700911)	(0.00449424)	(0.000371152)	(-0.00217801)
(-0.000295585)	(0.000307113)	(0.0010329)	(-0.0012165)	(0.000371152)	(0.00750224)	(-0.00122192)
(0.000205937)	(-0.00060274)	(-0.000396467)	(-0.00735303)	(-0.00217801)	(-0.00122192)	(0.00183026)
(0.00310288)	(-0.00143313)	(0.000211889)	(-0.000356948)	(-0.00697718)	(-0.000299914)	(-0.0017708)
(-0.00143313)	(0.00898124)	(0.000728152)	(-0.00149143)	(0.00142291)	(-0.00083763)	(0.00013051)
(0.000211889)	(0.000728152)	(0.00768551)	(0.00212565)	(0.00252701)	(0.0013397)	(-0.00103045)
(-0.000356948)	(-0.00149143)	(0.00212565)	(0.00437201)	(0.000250021)	(-0.000466248)	(-0.000830317)
(-0.00697718)	(0.00142291)	(0.00252701)	(0.000250021)	(0.00523115)	(0.00133257)	(-0.00635323)
(-0.000299914)	(-0.00083763)	(0.0013397)	(-0.000466248)	(0.00133257)	(0.0037466)	(-0.00106644)
(-0.0017708)	(0.00013051)	(-0.00103045)	(-0.000830317)	(-0.00635323)	(-0.00106644)	(0.00408863)
(0.0072151)	(-0.00154203)	(0.00065959)	(-0.0000610682)	(-0.000683121)	(-0.00768071)	(-0.00113551)
(-0.00154203)	(0.0166636)	(0.000569614)	(-0.000318861)	(-0.000361326)	(-0.000937944)	(0.000148518)
(0.00065959)	(0.000569614)	(0.0177175)	(-0.00132087)	(0.000550517)	(-0.000917367)	(-0.000231685)
(-0.0000610682)	(-0.000318861)	(-0.00132087)	(0.0175303)	(-0.000592281)	(-0.000853217)	(0.000256892)
(-0.000683121)	(-0.000361326)	(0.000550517)	(-0.000592281)	(0.0188885)	(0.00156227)	(0.000192148)
(-0.00768071)	(-0.000937944)	(-0.000917367)	(-0.000853217)	(0.00156227)	(0.0179825)	(-0.00725835)
(-0.00113551)	(0.000148518)	(-0.000231685)	(0.000256892)	(0.000192148)	(-0.00725835)	(0.00577994)
(0.251998)	(-0.000776555)	(-0.00622546)	(-0.000488824)	(-0.000457203)	(-0.00721912)	(-0.0386844)
(-0.000776555)	(0.784782)	(0.00312079)	(0.00116078)	(0.0000920534)	(0.00448734)	(-0.00365804)
(-0.00622546)	(0.00312079)	(0.78074)	(-0.00549635)	(0.00155386)	(-0.000229462)	(0.00275836)
(-0.000488824)	(0.00116078)	(-0.00549635)	(0.788502)	(-0.0000270619)	(0.00250679)	(-0.00255137)
(-0.000457203)	(0.0000920534)	(0.00155386)	(-0.0000270619)	(0.787056)	(0.00550648)	(-0.00621451)
(-0.00721912)	(0.00448734)	(-0.000229462)	(0.00250679)	(0.00550648)	(0.7921)	(-0.00802956)
(-0.0386844)	(-0.00365804)	(0.00275836)	(-0.00255137)	(-0.00621451)	(-0.00802956)	(0.261524)

4³

0.0796604	-0.000814267	-0.00676829	-0.00258896	-0.00305184	0.00384166	-0.0237983
-0.000814267	-0.0895059	0.00173931	-0.00471974	0.00727261	-0.00277387	0.00170112
-0.00676829	0.00173931	-0.0796153	0.000526239	0.000418513	0.00158254	0.00423449
-0.00258896	-0.00471974	0.000526239	-0.0866069	-0.00280585	-0.000465543	-0.0000711968
-0.00305184	0.00727261	-0.00418513	-0.00280585	-0.0819495	0.00502417	0.00229506
0.00384166	-0.00277387	0.00158254	-0.000465543	0.00502417	-0.0962796	-0.000484574
-0.0237983	0.00170112	0.00423449	-0.0000711968	0.00229506	-0.000484574	-0.0209765
-0.000814267	-0.0895059	0.00173931	-0.00471974	0.00727261	-0.00277387	0.00170112
-0.0895059	0.00391253	0.0170365	0.00687456	0.0027374	0.00573704	-0.0865477
0.00173931	0.0170365	-0.00254561	0.00206658	0.000485932	-0.000433312	-0.00334163
-0.00471974	0.00687456	0.00206658	-0.00935042	-0.0016424	0.00210241	-0.00138783
0.00727261	0.0027374	0.000485932	-0.0016424	0.00202632	0.00425535	-0.00678495
-0.00277387	0.00573704	-0.000433312	0.00210241	0.00425535	0.010399	0.00122961
0.00170112	-0.0865477	-0.00334163	-0.00138783	-0.00678495	0.00122961	-0.00443526
-0.00676829	0.00173931	-0.0796153	0.000526239	-0.00418513	0.00158254	0.00423449
0.00173931	0.0170365	-0.00254561	0.00206658	0.000485932	-0.000433312	-0.00334163
-0.0796153	-0.00254561	-0.0047253	-0.00513928	-0.00690843	-0.0080109	-0.0839445
0.000526239	0.00206658	-0.00513928	0.0160972	0.00287168	0.0000257657	0.00377704
-0.00418513	0.000485932	-0.00690843	0.00287168	0.000225323	-0.00310233	-0.00146257
0.00158254	-0.000433312	-0.0080109	0.0000257657	-0.00310233	0.00222373	0.00430721
0.00423449	-0.00334163	-0.0839445	0.00377704	-0.00146257	0.00430721	0.000998162
-0.00258896	-0.00471974	0.000526239	-0.0866069	-0.00280585	-0.000465543	-0.0000711968
-0.00471974	0.00687456	0.00206658	-0.00935042	-0.0016424	0.00210241	-0.00138783
0.000526239	0.00206658	-0.00513928	0.0160972	0.00287168	0.0000257657	0.00377704
-0.0866069	-0.00935042	0.0160972	0.00295772	0.00269201	-0.0901671	-0.0901671
-0.00280585	-0.0016424	0.00287168	0.00269201	-0.00903852	-0.0102953	0.000860404
-0.000465543	0.00210241	0.0000257657	-0.0101042	-0.0102953	0.0088935	-0.00210382
-0.0000711968	-0.00138783	0.00377704	-0.0901671	0.000860404	-0.00210382	-0.00149888
-0.00305184	0.00727261	-0.00418513	-0.00280585	-0.0819495	0.00502417	0.00229506
0.00727261	0.0027374	0.000485932	-0.0016424	0.00202632	0.00425535	-0.00678495
-0.00418513	0.000485932	-0.00690843	0.00287168	0.000225323	-0.00310233	-0.00146257
-0.00280585	-0.0016424	0.00287168	0.00269201	-0.00903852	-0.0102953	0.000860404
-0.0819495	0.00202632	0.000225323	-0.00903852	-0.00171292	0.00378956	-0.090357
0.00502417	0.00425535	-0.00310233	-0.0102953	0.00378956	0.00295192	-0.00474254
0.00229506	-0.00678495	-0.00146257	0.000860404	-0.090357	-0.00474254	-0.000217642
0.00384166	-0.00277387	0.00158254	-0.000465543	0.00502417	-0.0962796	-0.000484574
-0.00277387	0.00573704	-0.000433312	0.00210241	0.00425535	0.010399	0.00122961
0.00158254	-0.000433312	-0.0080109	0.0000257657	-0.00310233	0.00222373	0.00430721
-0.000465543	0.00210241	0.0000257657	-0.0101042	-0.0102953	0.0088935	-0.00210382
0.00502417	0.00425535	-0.00310233	-0.0102953	0.00378956	0.00295192	-0.00474254
-0.0962796	0.010399	0.00222373	0.0088935	0.00295192	0.00290144	-0.0816066
-0.000484574	0.00122961	0.00430721	-0.00210382	-0.00474254	-0.0816066	-0.000140253
-0.0237983	0.00170112	0.00423449	-0.0000711968	0.00229506	-0.000484574	-0.0209765
0.00170112	-0.0865477	-0.00334163	-0.00138783	-0.00678495	0.00122961	-0.00443526
0.00423449	-0.00334163	-0.0839445	0.00377704	-0.00146257	0.00430721	0.000998162
-0.0000711968	-0.00138783	0.00377704	-0.0901671	0.000860404	-0.00210382	-0.00149888
0.00229506	-0.00678495	-0.00146257	0.000860404	-0.090357	-0.00474254	-0.000217642
-0.000484574	0.00122961	0.00430721	-0.00210382	-0.00474254	-0.0816066	-0.000140253
-0.0209765	-0.00443526	0.000998162	-0.00149888	-0.000217642	-0.000140253	0.0832306

En las anteriores tablas se pueden ver las mismas estructuras de comportamientos que se observaron en el SDD de cinco grados de libertad:

1. Los primeros momentos se caracterizan por tener valores altos en los grados de libertad de los extremos (μ_1 , μ_6 y μ_1 , μ_7) y valores de momentos bajos en los términos intermedios.
2. El equilibrio del primer momento se da con términos de valor muy alto ubicados en el segundo y penúltimo término de las matrices de equilibrio, y términos de valor bajo en las otras posiciones.
3. Los términos de la energía turbulenta son mucho más altos que los demás segundos momentos turbulentos.
4. El equilibrio de los segundos momentos se da con términos muy altos situados en lugares equivalentes en las matrices de equilibrio, es decir, vecinos a las posiciones extrema.
5. Los terceros momentos turbulentos tienen tres escalas de valores definidas que siguen las mismas reglas explicadas para el SDD de cinco grados de libertad.

Conclusiones

De la utilización de tres métodos conducentes a obtener hipótesis de clausura se puede concluir que:

1. Utilizando la ecuación 3.1.3, obtenida de considerar el equilibrio de los momentos de probabilidad, se puede escribir el segundo momento en función de un momento de orden más alto elegido:

$$(3.1.5) \quad \mu^2 = \phi_{21} f_1 + \beta_{23} \phi_{32} \phi_{21} f_1 + \beta_{23} \beta_{34} \phi_{43} \phi_{32} \phi_{21} f_1 - \beta_{23} \beta_{34} \beta_{45} \mu^5$$

La estructura de esta ecuación llevaría a pensar que se pudiera realizar una truncación en el término que incluye el momento de orden cinco. Sin embargo, la evaluación numérica evidenció que *los términos intermedios (dependientes del tercer y cuarto momento), tienen magnitudes muy similares y signos contrarios que al sumarse se cancelan entre sí y, entonces, el valor de la variable segundo momento depende tanto de estos términos como del que involucra del quinto momento de probabilidad.* Por lo tanto, no se puede hacer este tipo de truncación pues se haría una hipótesis de clausura sobre un término de tanta relevancia como cualquier otro.

2. Establecer un método equivalente al modelo $\kappa\text{-}\varepsilon$, conduce a una relación entre los momentos de primer orden y los momentos turbulentos de segundo orden dada por la ecuación 3.2.18. En esta ecuación, los primeros momentos se obtienen de una combinación lineal de los segundos momentos turbulentos. Esto dificulta la resolución del primer momento de probabilidad puesto que lo que hubiera sido útil era expresar los segundos momentos turbulentos como combinación lineal de los primeros con el fin de utilizar esta expresión y reemplazarla en la ecuación 3.2.1. Sin embargo, este resultado dio luces para abordar el problema considerando que en esa combinación lineal podría haber términos más relevantes que otros.

3. El SDD redefinido, presenta equilibrio en sus momentos de probabilidad.

4. Los resultados numéricos proveniente del equilibrio del primer y segundo momento de probabilidad muestran los siguientes resultados, para un SDD de cinco grados de libertad:

- Los promedios de los grados de libertad 2, 3 y 4 son pequeños comparados con los promedios de los grados de libertad 5.
 - Los momentos turbulentos que están por fuera de la diagonal de la matriz de segundos momentos, son pequeños comparados con los elementos de la diagonal (energía turbulenta).
 - En la matriz $\mu^1\mu^{2'}$, se puede apreciar como los términos de valor alto son los dados por la combinación entre los primeros momentos de los grados de libertad 1 y 5 (μ_1^1, μ_5^1) y los segundos momentos turbulentos $\mu_{1,1}^{2'}, \mu_{2,2}^{2'}, \mu_{3,3}^{2'}, \mu_{4,4}^{2'}, \mu_{5,5}^{2'}$.
 - En la matriz de terceros momentos turbulentos $\mu^{3'}$, hay tres escalas de valores muy definidas: los valores más altos son aquellos que están dados por términos con subíndices correspondientes a la combinación de grado de libertad de alto promedio con grado de libertad de energía turbulenta alta. Es decir: $\mu_{1,2,2}^{3'}, \mu_{1,3,3}^{3'}, \mu_{1,4,4}^{3'}, \mu_{5,2,2}^{3'}, \mu_{5,3,3}^{3'}, \mu_{5,4,4}^{3'}$. La escala intermedia de valores está dada por términos con subíndices correspondientes a la combinación de grado de libertad de alto promedio con grado de libertad de energía turbulenta media ($\mu_{1,5,5}^{3'}, \mu_{5,1,1}^{3'}$) o por la diagonal de la matriz $\mu^{3'}$ ($\mu_{1,1,1}^{3'}, \mu_{2,2,2}^{3'}, \mu_{3,3,3}^{3'}, \mu_{4,4,4}^{3'}, \mu_{5,5,5}^{3'}$). Los términos restantes hacen parte de los valores bajos y están dados por términos con subíndices correspondientes a combinaciones entre grados de libertad con promedio bajo y segundos momentos turbulentos bajos.
5. Las observaciones hechas en las matrices mostradas en las tablas 1 y 2, arroja como resultado que, de los 125 terceros momentos existentes en un sistema de cinco grados de libertad, sólo 12 afectan a los segundos momentos turbulentos diagonales.
6. La redefinición del SDD sólo en función del término de conservación de energía, lleva a resultados en los que el valor de los momentos de probabilidad dependen del valor de la energía del sistema (tablas 3 y 4):
- Los primeros momentos de valor alto dependen linealmente del valor de las condiciones iniciales.
 - Los términos de la energía turbulenta, al igual que los terceros momentos turbulentos considerados de valor alto en intermedio, dependen de las condiciones iniciales en un polinomio de segundo orden.

- Aquellos términos que en general son considerados de valor bajo, dependen de las condiciones iniciales con polinomios de orden mayor a dos.

7. Para obtener valores convergentes y que aproximen los resultados al equilibrio del SDD, se debe utilizar un diferencial de tiempo de, al menos, el orden de 10^{-2} seg (tabla 5). Sin embargo, el costo computacional de evaluar el SDD con diferenciales de tiempo de este orden en lugar del orden 10^{-1} , es aumentar de 5 a 10 veces el tiempo de computación.

8. Al comparar los valores obtenidos utilizando 15 o 30 condiciones iniciales (tabla 6), se observa que las diferencias entre los valores no va más allá del 10%. El costo computacional de ir de 15 condiciones iniciales a 30 condiciones iniciales es aumentar cinco veces el tiempo de computación.

9. Los resultados obtenidos para el SDD de cinco grados de libertad se pueden extender para SDD de cualquier cantidad de grados de libertad (tablas 7 y 8).

10. Se debe utilizar un equipo computacional con mayor velocidad de proceso y mayor memoria en RAM (ver Metodología), con el fin de disminuir los tiempos de computación y poder evaluar el SDD con mayor cantidad de condiciones iniciales y diferenciales de tiempo del orden de al menos 10^{-3} seg.

Bibliografía

- [1] Biferale, L., et al 1995. Transition to Chaos in a Shell Model of Turbulence. *Physica D* 80: 105-119.
- [2] Bohr, T. et al 1998. Dinámical Systems Approach to Turbulence.
- [3] Frisch, U. (ed.) 1995. *Turbulence, The legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] Kadannoff L., et al 1995. Scaling and dissipation in a shell model of trubulence. *Phys. Fluids* 7 (3): 617-629.
- [5] Pope, S. (ed.) 2000. *Turbulent Flows*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Toro, J.R.. *Turbulencia y sistemas dinámicos, Notas de clase*. Bogotá: Universidad de los Andes.

ANEXO 1. Índice de ecuaciones

(1.1)	$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu L(v) + B(v, v) + \Lambda(p) + f$	5
(1.2)	$\frac{du_i}{dt} = \nu L_{ij} u_j + B_{ijk} u_j u_k + f_i, \forall i, i=1,2,\dots,n$	5
(1.1.1)	$L_{ij} = -\lambda_i \delta_{ij}$ (sin suma sobre i).....	5
(1.1.2)	$\frac{du_i}{dt} = -\nu \lambda_i u_i \rightarrow u_i(t) = u_i(0)e^{-\nu \lambda_i t}, \lambda_i > 0$	5
(1.1.3)	$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}$	6
(1.1.4)	$v_1 = e^{-\nu \lambda_i t} \cos(\sqrt{\lambda_i} x_2)$, para $\lambda_i = (2i-1) \frac{\pi}{2}$	6
(1.2.1.1)	$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = 0$	7
(1.2.1.2)	$[\nabla v]v = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\nabla \times v) \times v$	7
(1.2.1.3)	$v \cdot [\nabla v]v = v \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + v \cdot ((\nabla \times v) \times v)$	7
(1.2.1.4)	$v \cdot [\nabla v]v = v \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)$	7
(1.2.1.5)	$v \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = v_i \frac{\partial v_k^2}{\partial x_i}$	8
(1.2.1.6)	$\frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} = v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -(v \cdot [\nabla v]v) = -v \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial v_i v_k^2}{\partial x_i} = -\nabla \cdot (v^2 v)$	8
(1.2.1.7)	$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla \cdot (v^2 v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} v^2 v \cdot n dS$	8
(1.2.1.8)	$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2} d\Omega = 0$	8
(1.2.1.9)	$B_{ijk} u_i u_j u_k = 0$	8
(1.2.1.10)	$u_i \frac{du_i}{dt} = \frac{du_i^2}{dt} = B_{ijk} u_i u_j u_k = 0$	8
(1.2.2.1)	$B_{ijk} = \beta_i R_{j-i, k-i}$, donde: $R_{j-i, k-i} = 0$, si $ j-i > 1$ o $ k-i > 1$	9
(1.4.1)	$\frac{du_i}{dt} = ? \lambda_i u_i + B_{ijk} u_j u_k + f_i$	9

(2.1.1) $\bar{u}_i^n = \int_{\Omega} u_i^n p(u) d\Omega$ 13

(2.1.2) $\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla_u \bullet p \frac{du}{dt}$ 13

(2.1.3) $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ 14

(2.2.1) $\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \nu \lambda_i \bar{u}_i + B_{ijk} \bar{u}_j \bar{u}_k + f_i$ 14

(2.2.2) $\frac{d\mu_i^1}{dt} = L_{1i} \mu_i^1 + B_{12i} \mu_{j,k}^2 + f_i$ 14

(2.2.3) $\frac{d}{dt} (\overline{u_m u_n}) = u_m \frac{du_n}{dt} + u_n \frac{du_m}{dt}$ 14

(2.2.4) $\frac{d}{dt} (\overline{u_m u_n}) = \nu (\lambda_m + \lambda_n) \overline{u_m u_n} + B_{mjk} \overline{u_j u_k u_n} + B_{njm} \overline{u_j u_k u_m} + \overline{u_m f_n} + \overline{u_n f_m}$ 15

(2.2.5) $\frac{d}{dt} \mu^2 = L_2 \mu^2 + B_{23} \mu^3 + F_{21} \mu^1$ 15

(2.2.6) $\frac{d}{dt} (\overline{u_m u_n u_p}) = u_m u_p \frac{du_n}{dt} + u_n u_p \frac{du_m}{dt} + u_n u_m \frac{du_p}{dt}$ 15

(2.2.7) $\frac{d}{dt} (\overline{u_m u_n u_p}) = \nu (\lambda_m + \lambda_n + \lambda_p) \overline{u_m u_n u_p} + B_{mjk} \overline{u_j u_k u_n u_p} + B_{njm} \overline{u_j u_k u_m u_p} + B_{pjk} \overline{u_j u_k u_m u_n} + \overline{u_m u_p f_n} + \overline{u_n u_p f_m} + \overline{u_n u_m f_p}$ 15

(2.2.8) $\frac{d}{dt} \mu^3 = L_3 \mu^3 + B_{34} \mu^4 + F_{32} \mu^2$ 15

(2.2.9) $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & L_2 & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & F_{32} & L_3 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 15

(2.2.10) $L_{P_\epsilon} = -\sum_{\epsilon=1}^n \lambda_{P_\epsilon} \mu_{P_\epsilon}$ 16

(2.2.11) $B_{P_\epsilon, (P+1)_\epsilon} = -\sum_{\epsilon=1}^n (B_{P_\epsilon} \mu_{P_n, j, k} (\mu_{P_\epsilon})^{-1})$ 16

(2.2.12) $F_{P_\epsilon, (P-1)_\epsilon} = \sum_{\epsilon=1}^n f_{P_\epsilon} \mu_{P_n}$ 16

(2.3.1) $\frac{\bar{u}_i^2}{2} = \frac{\bar{u}_i^{-2}}{2} + \frac{\bar{u}_i'^2}{2}$ 16

(2.3.2) $E_i = e_i + \kappa_i$ 16

$$(2.3.3) \quad \frac{d}{dt} \overline{(u_i u_i)} = \overline{u_i \frac{du_i}{dt}} + \overline{u_i \frac{du_i}{dt}} = 2 \overline{u_i \frac{du_i}{dt}} \dots\dots\dots 16$$

$$(2.3.4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\overline{(u_i u_i)}}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\overline{(u_i^2)}}{2} = \overline{u_i \frac{du_i}{dt}} \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.5) \quad \frac{d}{dt} E_i = \overline{u_i \frac{du_i}{dt}} \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.6) \quad \frac{d}{dt} E_i = \overline{u_i * (\nu \lambda_i u_i + B_{ijk} u_j u_k + f_i)} \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.7) \quad \frac{d}{dt} E_i = \overline{u_i * (\nu \lambda_i u_i + B_{ijk} u_j u_k + f_i)} \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.8) \quad \frac{d}{dt} E_i = 2 \lambda_i E_i + \overline{B_{ijk} u_i u_j u_k} + \overline{f_i u_i} \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.9) \quad \frac{d \overline{u_i}}{dt} * \overline{u_i} = \frac{d \overline{u_i^2}}{dt} = \frac{d}{dt} e_i \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.10) \quad \frac{d}{dt} e_i = 2 \lambda_i e_i + \overline{B_{ijk} u_i u_j u_k} + \overline{f_i u_i} \dots\dots\dots 17$$

$$(2.3.11) \quad \frac{d}{dt} \kappa_i = 2 \lambda_i \kappa_i + \overline{B_{ijk} u_i u_j u_k} - \overline{B_{ijk} u_i u_j u_k} \dots\dots\dots 17$$

$$(3.1.1) \quad \overline{\mu^n} = \frac{1}{T} \int_0^T \mu^n dt \dots\dots\dots 18$$

$$(3.1.2) \quad \begin{bmatrix} L_1 & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & L_2 & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & F_{32} & L_3 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \\ \mu^3 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots 19$$

$$(3.1.3) \quad \mu^n = \overline{f_b}_n (\overline{B}_{n,n+1} \mu_{n+1} + (1)^n \sum_{m=n}^2 \overline{F}_{m,m-1} \overline{f_b}_{m-1}) \dots\dots\dots 19$$

$$(3.1.4) \quad \mu^2 = \overline{f_b}_2 \overline{F}_{21} \overline{f_1} + \overline{f_b}_2 \overline{B}_{23} \overline{f_b}_3 \overline{F}_{32} \overline{f_b}_2 \overline{F}_{21} \overline{f_1} + \overline{f_b}_2 \overline{B}_{23} \overline{f_b}_3 \overline{B}_{34} \overline{f_b}_4 \overline{F}_{43} \overline{f_b}_3 \overline{F}_{32} \overline{f_b}_2 \overline{F}_{21} \overline{f_1} \dots\dots\dots 19$$

$$\overline{f_b}_2 \overline{B}_{23} \overline{f_b}_3 \overline{B}_{34} \overline{f_b}_4 \overline{B}_{45} \mu^5$$

$$(3.1.5) \quad \mu^2 = \phi_{21} \overline{f_1} + \beta_{23} \phi_{32} \phi_{21} \overline{f_1} + \beta_{23} \beta_{34} \phi_{43} \phi_{32} \phi_{21} \overline{f_1} - \beta_{23} \beta_{34} \beta_{45} \mu^5 \dots\dots\dots 19$$

$$(3.2.1) \quad \frac{d \overline{u_i}}{dt} = \nu \lambda_i \overline{u_i} + \overline{B_{ijk} u_j u_k} - \overline{B_{ijk} u_j u_k} + \overline{f_i} \dots\dots\dots 22$$

$$(3.2.2) \quad - \frac{\overline{u_j u_k}}{\rho} = \frac{\sigma_T}{\rho} = 2 \nu_T \overline{D} \dots\dots\dots 22$$

$$(3.2.3) \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \dots\dots\dots 22$$

$$(3.2.4) \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \dots\dots\dots 22$$

- (3.2.5) $\overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \overline{(\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}}$ 23
- (3.2.6) $\overline{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$ 23
- (3.2.7) $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$ 23
- (3.2.8) $u(x, t) = \sum_k u_k e^{ikx}$ 23
- (3.2.9) $u(x, t) = \sum_k (\bar{u}_k + u'_k) e^{ikx}$ 23
- (3.2.10) $\overline{u(x, t) + u'(x, t)} = \sum_k (\bar{u}_k + u'_k) e^{ikx}$ 23
- (3.2.11) $u'(x, t) * u'(x, t) = \sum_m \sum_n u'_m u'_n e^{imx} e^{inx}$ 23
- (3.2.12) $u'(x, t) * u'(x, t) = \sum_{n,m} u'_m u'_n e^{i(m+n)x}$ 23
- (3.2.13) $u'(x, t) * u'(x, t) = \sum_{n,m} u'_m u'_n \sum_k \delta_{k,m+n} e^{ikx}$ 23
- (3.2.14) $\overline{u'(x, t) * u'(x, t)} = \sum_k e^{ikx} \sum_{n,m} \delta_{k,m+n} \overline{u'_m u'_n}$ 23
- (3.2.15) $\bar{D} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ 24
- (3.2.16) $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \sum_k iku_k e^{ikx}$ 24
- (3.2.17) $\sum_k e^{ikx} \sum_{n,m} \delta_{k,m+n} \overline{u'_m u'_n} = 2v_T \frac{1}{2} \sum_k iku_k e^{ikx}$ 24
- (3.2.18) $\sum_{n,m} \delta_{k,m+n} \overline{u'_m u'_n} = 2v_T \frac{1}{2} iku_k$ 24
- (3.3.1) $\frac{du_i}{dt} = B_{ijk} u_j u_k$ 25
- (3.3.2) $\frac{d\mu_i^1}{dt} = B_{ijk} \mu_j^1 * \mu_k^1 + B_{ijk} \mu_{j,k}^2$ 25
- (3.3.1.1) $B_{12,i} \mu_j^1 * \mu_k^1 = B_{12,i} \mu_{j,k}^2$ 26
- (3.3.1.2) $\mu_2^1, \mu_3^1, \mu_4^1 \ll \mu_1^1, \mu_5^1$ 26
- (3.3.1.3) $\mu_{j,k}^2 \sim 0, j \neq k$ 27
- (3.3.1.4) $4\mu_1^1 \mu_1^1 = 4\mu_{1,1}^2 + 4\mu_{3,3}^2$ 27
- (3.3.1.5) $0 = 8\mu_{2,2}^2 + 8\mu_{4,4}^2$ 27
- (3.3.1.6) $16\mu_5^1 \mu_5^1 = 16\mu_{3,3}^2 + 16\mu_{5,5}^2$ 27

- (3.3.1.7) $\mu_{2,2}^{2'} = \mu_{4,4}^{2'} \dots\dots\dots 27$
- (3.3.2.1) $\frac{d\mu_{i,m}^2}{dt} = B_{ijk} \mu_{m,j,k}^3 + B_{mjk} \mu_{i,j,k}^3 + B_{ijk} (\mu_j^1 \mu_{m,k}^2 + \mu_k^1 \mu_{m,j}^2) + B_{mjk} (\mu_j^1 \mu_{i,k}^2 + \mu_k^1 \mu_{i,j}^2) \dots 28$
- (3.3.2.2) $B_{ijk} \mu_{m,j,k}^3 + B_{mjk} \mu_{i,j,k}^3 = B_{ijk} (\mu_j^1 \mu_{m,k}^2 + \mu_k^1 \mu_{m,j}^2) - B_{mjk} (\mu_j^1 \mu_{i,k}^2 + \mu_k^1 \mu_{i,j}^2) \dots\dots\dots 28$
- (3.3.2.3) $\mu_{11}^{2'} = \frac{1}{2\mu_1} (\mu_{133}^3 + \mu_{122}^3 - \mu_{111}^3) + \frac{1}{2} \mu_{22}^{2'} \dots\dots\dots 30$
- (3.3.2.4) $\mu_{22}^{2'} = \frac{1}{2\mu_3} (\mu_{211}^3 - 2\mu_{322}^3 - \mu_{233}^3) \dots\dots\dots 30$
- (3.3.2.5) $\mu_{33}^{2'} = \frac{32\mu_{433}^3 - 8\mu_{233}^3}{8\mu_2^1 - 32\mu_4^1} \dots\dots\dots 30$
- (3.3.2.6) $\mu_{44}^{2'} = \frac{1}{2\mu_3} (\mu_{455}^3 - 2\mu_{344}^3 - \mu_{4233}^3) \dots\dots\dots 30$
- (3.3.2.7) $\mu_{55}^{2'} = \frac{1}{2\mu_5} (\mu_{544}^3 + \mu_{533}^3 - \mu_{555}^3) + \frac{1}{2} \mu_{44}^{2'} \dots\dots\dots 31$
- (3.1.5) $\mu^2 = \phi_{21} f_1 + \beta_{23} \phi_{32} \phi_{21} f_1 + \beta_{23} \beta_{34} \phi_{43} \phi_{32} \phi_{21} f_1 - \beta_{23} \beta_{34} \beta_{45} \mu^5 \dots\dots\dots 53$

ANEXO 2. Índice de figuras

Figura 1. Comportamiento del grado de libertad 6 para $\nu=0.01$. Se puede observar que hay un comportamiento laminar del sistema.	10
Figura 2. Comportamiento del grado de libertad 6 para $\nu=0.00004$. Se puede observar que hay un comportamiento periódico del sistema.	10
Figura 3. Comportamiento del grado de libertad 5 para $\nu=0.00001$. Se puede observar que para este valor de viscosidad el sistema presenta comportamiento turbulento. ...	10
Figura 4. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.01$, con condición inicial $u_4=0.1$. Se puede observar que hay un comportamiento laminar del sistema.....	11
Figura 5. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.01$, con condición inicial $u_4=10$. Se puede observar que hay un comportamiento laminar del sistema.....	11
Figura 6. Diferencia entre las evoluciones de las gráficas 2.1.1 y 2.1.2 del grado de libertad 4. Se puede observar como, a pesar que una condición inicial es cien veces la otra, el sistema tiende al mismo punto atractivo.....	12
Figura 7. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.0001$, con condición inicial $u_4=0.5$. Se puede observar que hay un comportamiento turbulento del sistema.	12
Figura 8. Comportamiento del grado de libertad 4 para $\nu=0.0001$, con condición inicial $u_4=0.6$. Se puede observar que hay un comportamiento turbulento del sistema.	12
Figura 9. Diferencia entre las evoluciones de las gráficas 2.1.4 y 2.1.5 del grado de libertad 4. Se puede observar como, a pesar de la pequeña diferencia entre los valores de las condiciones iniciales, las órbitas del grado de libertad no llegan al mismo valor.....	13
Figura 10. Representación gráfica de la dependencia de los segundos momento de probabilidad turbulentos en función de los primeros momentos de probabilidad y los terceros momentos de probabilidad turbulentos.....	31
Figura 11. μ^1 vs. ci.....	35
Figura 12. μ^2 vs. ci.....	35
Figura 13. μ^3 vs. ci.....	35
Figura 14. μ^4 vs. ci.....	35
Figura 15. μ^5 vs. ci.....	36
Figura 16. μ^{11} vs. ci.....	36
Figura 17. μ^{22} vs. ci.....	36
Figura 18. μ^{33} vs. ci.....	36
Figura 19. μ^{44} vs. ci.....	37
Figura 20. μ^{55} vs. ci.....	37
Figura 21. μ^{111} vs. ci.....	37
Figura 22. μ^{122} vs. ci.....	37
Figura 23. μ^{133} vs. ci.....	38
Figura 24. μ^{211} vs. ci.....	38
Figura 25. μ^{233} vs. ci.....	38
Figura 26. μ^{322} vs. ci.....	38
Figura 27. μ^{344} vs. ci.....	39
Figura 28. μ^{433} vs. ci.....	39
Figura 29. μ^{455} vs. ci.....	39

Figura 30.	μ^{533}	vs. ci.....	39
Figura 31.	μ^{544}	vs. ci.....	40
Figura 32.	μ^{555}	vs. ci.....	40
Figura 33.	μ_{111}	vs. dt.....	43
Figura 34.	μ_{122}	vs. dt.....	43
Figura 35.	μ_{133}	vs. dt.....	43
Figura 36.	μ_{211}	vs. dt.....	43
Figura 37.	μ_{233}	vs. dt.....	44
Figura 38.	μ_{322}	vs. dt.....	44
Figura 39.	μ_{344}	vs. dt.....	44
Figura 40.	μ_{433}	vs. dt.....	44
Figura 41.	μ_{455}	vs. dt.....	45
Figura 42.	μ_{533}	vs. dt.....	45
Figura 43.	μ_{544}	vs. dt.....	45
Figura 44.	μ_{555}	vs. dt.....	45

ANEXO 3. Índice de tablas

Tabla 1. Equilibrio del primer momento de probabilidad.	26
Tabla 2. Equilibrio del segundo momento de probabilidad.	28
Tabla 3. Ecuaciones de relación de los momentos de probabilidad y las condiciones iniciales.	32
Tabla 4. Ecuaciones de relación de los momentos de probabilidad y las condiciones iniciales.	34
Tabla 5. Porcentaje de diferencia entre valores de los terceros momentos turbulentos. .	41
Tabla 6. Resultados para el SDD de 5 grados de libertad con 15 y 30 condiciones iniciales.	46
Tabla 7. Equilibrio del primer momento de probabilidad para el SDD de 6 y 7 grados de libertad.	47
Tabla 8. Equilibrio del segundo momento de probabilidad para el SDD de 6 y 7 grados de libertad.	48

ANEXO 4. Programas de computador

```

sistema[n_] :=
  (matriz = Table[Flatten[Table[ko*(2^(i-1))*If[Abs[j-i]>1]||Abs[k-i]>1], 0, If[n==3,
    Switch[i, 1, Part[{0, 0, 0}, {0, 0, -2}, {0, -2, 0}], {k-i+2}, {j-i+2}],
    2, Part[{2, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, -2}], {k-i+2}, {j-i+2}],
    3, Part[{0, 1/2, 0}, {1/2, 0, 0}, {0, 0, 0}], {k-i+2}, {j-i+2}]],
    If[i==1]||i==2]||i==n-1]||i==n, Switch[i,
    1, Part[{0, 0, 0}, {0, 0, -2}, {0, -2, 0}], {k-i+2}, {j-i+2}],
    2, Part[{2, 0, 0}, {0, 0, -2}, {0, -2, -2}], {k-i+2}, {j-i+2}],
    n-1, Part[{2, 1/2, 0}, {1/2, 0, 0}, {0, 0, -2}], {k-i+2}, {j-i+2}],
    n, Part[{0, 1/2, 0}, {1/2, 0, 0}, {0, 0, 0}], {k-i+2}, {j-i+2}]],
    Part[{2, 1/2, 0}, {1/2, 0, -2}, {0, -2, -2}], {k-i+2}, {j-i+2}]]], {j, 1, n}, {k, 1, n}], {i, 1, n}];
  vara = Flatten[Table[uu_j[t]*uu_k[t], {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
  eca = matriz.vara;
  ecuacionesa = Thread[eca == Table[uu_h'[t], {h, 1, n}]];
  cia = Table[uu_p[0] == 1, {p, 1, n}];
  uniona = Join[ecuacionesa, cia];
  vara = Table[uu_p[t], {p, 1, n}];
  soluciona = NDSolve[uniona, vara, {t, 0, 200}, MaxSteps -> 700000];

```

```

todo[n_, ss_, t1_, t2_, dit_] :=
(sistema[n];
  Print[sistema];
  conini = Table[uu;[t]/. soluciona, {i, 1, n}, {t, 100, (99 + ss), 1}];
  conini = Transpose[conini];
  var = Flatten[Table[u;[t]*uk[t], {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
  ec = matriz.var;
  ecuaciones = Thread[ec = Table[uh'[t], {h, 1, n}]];
  For[r = 1, r < ss + 1, r ++, ci = Table[up[0] = (Part[conini, r, p, 1] + .001 * 2000), {p, 1, n}];
    union = Join[ecuaciones, ci]; var = Table[up[t], {p, 1, n}];
    solucionr = NDSolve[union, var, {t, t1, t2}, MaxSteps → 700000];
    solucionr = Flatten[solucionr]; Print[r];
  h = ((t2 - t1)/dit) + 1;
  Print["utodo"];
  utodo = Table[u;[t]/. solucionj, {i, 1, n}, {j, 1, ss}, {t, t1, t2, dit}];
  utut = Table[utodo[[i]]*utodo[[k]], {i, 1, n}, {k, 1, n}];
  ututprom = Table[Apply[Plus, utut[[i, j]]]/ss, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
  ergo = Table[Apply[Plus, utodo[[i, j]]]/h, {i, 1, n}, {j, 1, ss}];
  Print["prom"];
  prom = Table[Apply[Plus, utodo[[i]]]/ss, {i, 1, n}];
  momprom = Table[Apply[Plus, prom[[i]]]/h, {i, 1, n}];
  Print["promprom"];
  promprom = Table[prom[[i]]*prom[[k]], {i, 1, n}, {k, 1, n}];
  Print["calculos"];
  mom2turb = ututprom - promprom;
  mom2turbprom = Table[Apply[Plus, mom2turb[[i, j]]]/h, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
  momppromprom = Table[Apply[Plus, promprom[[i, j]]]/h, {i, 1, n}, {j, 1, n}];
  mommom = Table[Part[momppromprom, i]*Part[momppromprom, j], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
  matrixprom = Table[prom[[i]], {i, 1, n}, {j, 1, ss}];
  uturb = utodo - matrixprom;
  Print["prompmt2"];
  pmt2 = Table[Part[prom, j]*Part[mom2turb, m, k], {j, 1, n}, {m, 1, n}, {k, 1, n}];
  prompmt2 = Table[Apply[Plus, pmt2[[i, j, k]]]/h, {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}];
  Print["promppmt2"];
  ppmt2 = Table[Part[prom, j]*Part[prom, k]*Part[mom2turb, i, m], {j, 1, n}, {k, 1, n}, {i, 1, n}, {m, 1, n}];
  promppmt2 = Table[Apply[Plus, ppmt2[[i, j, k, l]]]/h, {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}];
  Print["uturb3"];
  uturb3 = Table[uturb[[i]]*uturb[[j]]*uturb[[k]], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}];
  Print["uturbmom3"];
  uturbmom3 = Table[Apply[Plus, uturb3[[i, j, k]]]/ss, {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}];
  Print["promuturbmom3"];
  promuturbmom3 = Table[Apply[Plus, uturbmom3[[i, j, k]]]/h, {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}];

```